

# ISOMETRISCHE EINBETTUNG VON GESCHLOSSENEN RIEMANNschen MANNIGFALTIGKEITEN

An der Fakultät für Mathematik  
der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Diplom-Mathematiker  
angefertigte

## Diplomarbeit

vorgelegt von  
NORMAN ZERGÄNGE  
geboren am 30.04.1988 in Staßfurt,  
Studiengang Mathematik.

19. November 2013

Betreut am Institut für Analysis und Numerik von  
PROF. DR. HABIL. MILES SIMON

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
1.1	Darstellung des Problems . . . . .	4
1.2	Beschreibung der Vorgehensweise . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Existenzsätze für freie Einbettungen</b>	<b>8</b>
2.1	Begriffsklärung . . . . .	8
2.2	Grundlegende Eigenschaften von freien Abbildungen . . . . .	10
2.3	Freie Einbettung einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . . . . .	11
2.4	Einbettungssatz für eine kompakte Mannigfaltigkeit . . . . .	12
2.5	Freie Einbettung einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Reduktion auf ein lokales Problem</b>	<b>20</b>
3.1	Dekomposition der Metrik . . . . .	20
3.2	Hilfsresultate . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Reduktion auf ein Perturbationsproblem</b>	<b>30</b>
4.1	Hilfsresultate . . . . .	31
4.2	Konstruktion der lokalen Hilfsabbildungen $F_{\epsilon,k}$ . . . . .	41
4.2.1	Konstruktion der Hilfsabbildung $F_2$ . . . . .	42
4.2.2	Konstruktion der Hilfsabbildung $F_k$ für $k \geq 3$ . . . . .	49
4.3	Perturbation einer freien Abbildung . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Lösung des lokalen Perturbationsproblems</b>	<b>62</b>
5.1	Definition verschiedener Hilfsoperatoren . . . . .	62
5.2	Formulierung des Fixpunktproblems . . . . .	67
5.3	Die Poissongleichung mit Dirichlet-Randbedingung . . . . .	69
5.4	Hölderabschätzungen der Hilfsoperatoren . . . . .	73
5.5	Lösung des Fixpunktproblems . . . . .	84

<b>6 Konstruktion der isometrischen Einbettung</b>	<b>89</b>
6.1 Lösung des lokalen Problems . . . . .	89
6.2 Beweis der Hauptsätze . . . . .	93
<b>7 Isometrische Einbettung einer Familie von Riemannschen Mannigfaltigkeiten</b>	<b>95</b>
7.1 Konstruktion einer lokaler Lösung . . . . .	95
7.2 Regularität der lokalen Lösung . . . . .	98
7.3 Konstruktion der globalen Einbettung . . . . .	105
<b>Anhang</b>	<b>110</b>
<b>A Funktionenräume</b>	<b>110</b>
<b>B Begriffe</b>	<b>116</b>
<b>C Hilfsresultate</b>	<b>130</b>
<b>Notation</b>	<b>137</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>141</b>
<b>Index</b>	<b>142</b>

# 1 Einleitung

## 1.1 Darstellung des Problems

In der vorliegenden Diplomarbeit wird gezeigt, dass für eine gegebene  $n$ -dimensionale geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  eine Raumdimension  $q(n) \in \mathbb{N}$  existiert, so dass sich  $(M, g)$  isometrisch in den Raum  $\mathbb{R}^{q(n)}$  einbetten lässt. Das bedeutet, es existiert eine glatte Einbettung  $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$ , so dass  $F^*(g^{can}) = g$  gilt. Diese Fragestellung wurde erstmalig von J. Nash in der Arbeit [Nas56] beantwortet. J. Nash hat gezeigt, dass für jede kompakte Mannigfaltigkeit, mit einer gegebenen  $C^k$ -Metrik für  $k \geq 3$  eine isometrische Einbettung in den Raum  $\mathbb{R}^{q(n)}$  für  $q(n) = \frac{n}{2}(3n + 11)$  existiert, wobei für die Regularität der Einbettung mindestens  $C^k$  gewährleistet wird. Der von J. Nash geführte Beweis gilt als technisch sehr anspruchsvoll. Später zeigten M. L. Gromov und V.A. Rokhlin in der Arbeit [GR70], dass sich die Wahl von  $q(n)$  auf  $\frac{1}{2}(n^2 + 9n + 10)$  reduzieren lässt, sofern die Metrik glatt ist, wobei sich die Regularität der Metrik auf die Einbettung überträgt. In den späten 80er-Jahren des 20. Jahrhunderts fand Matthias Günther einen neuen Weg, den Einbettungssatz zu beweisen, hierfür sei auf die Arbeiten [Gün89a], [Gün89b] und [Gün91] verwiesen, welche die Grundlage der vorliegenden Diplomarbeit bilden. Es wird gezeigt, dass sich jede  $n$ -dimensionale geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  isometrisch in den Raum  $\mathbb{R}^{q(n)}$  für  $q(n) := \max \left\{ \frac{n}{2}(n + 5), \frac{n}{2}(n + 3) + 5 \right\}$  einbetten lässt. Hierbei wird sowohl von der Mannigfaltigkeit  $M$ , als auch von der Metrik  $g$  Glattheit vorausgesetzt, welche sich auf die Einbettung übertragen wird.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass die zugrunde liegende Fragestellung, im lokalen Sinne, bereits im späteren 19. Jahrhundert von L. Schläefi in [Sch71], und in den 20er-Jahren des 20. Jahrhunderts von M. Janet [Jan26] und É. Cartan [Car27] diskutiert worden sind. Für weitere historische Hintergrundinformationen sei auf [HH06] und [And02] verwiesen.

Im Anschluss an die Darstellung der Beweisführung von Matthias Günther wird eine Möglichkeit beschrieben, eine glatte Familie von Riemannschen Mannigfaltigkeiten, wie

---

zum Beispiel den in der Arbeit [Ham82] beschriebenen Ricci-Fluss, für eine kurze Zeit isometrisch in den Vektorraum  $\mathbb{R}^{q(n)}$  einzubetten.

## 1.2 Beschreibung der Vorgehensweise

In der gesamten Arbeit wird ausschließlich eine **geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit**  $(M, g)$  betrachtet. Das ist eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit  $M$  ohne Rand, gemäß Definition B.21, im Unterschied zu [Lee03, Chapter 1, Manifolds with Boundary], zusammen mit einer Riemannschen Metrik  $g \in \mathcal{T}^2(M)$ . Aus dem folgenden Satz wird sich die Existenz einer isometrischen Einbettung ergeben, der hierbei verwendete Begriff der freien Einbettung wird in Abschnitt 2.1 exakt definiert:

**Hauptsatz 1.1** *Gegeben sei eine  $n$ -dimensionale geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(M, g)$ , und eine freie Einbettung  $F_0 \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$ , mit  $q \geq \frac{n}{2}(n+3) + 5$ , so dass  $g - F_0^*(g^{can}) \in \mathcal{T}^2(M)$  eine Riemannsche Metrik ist. Ferner sei ein  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  gegeben, dann existiert eine freie Einbettung  $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$ , so dass  $F^*(g^{can}) = g$  und:*

$$\max_{x \in M} |F(x) - F_0(x)|_{\mathbb{R}^q} \leq \delta$$

*gilt.*

Für spätere Zwecke sei erwähnt, dass mit (B.5) die Gleichung  $F^*(g^{can}) = g$  für eine Karte  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$  äquivalent zu:

$$\partial_i {}^\varphi F(\varphi(x)) \cdot \partial_j {}^\varphi F(\varphi(x)) = {}^\varphi g_{ij}(\varphi(x)) \quad (1.1)$$

für  $x \in U$  und  $1 \leq i \leq j \leq n$  ist. Die Existenz einer freien Einbettung  $F_0 \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$  mit der Eigenschaft, dass  $g - F_0^*(g^{can})$  eine Riemannsche Metrik auf  $M$  ist, wird Gegenstand von Kapitel 2 sein. In Kapitel 3 beginnt der Beweis von Hauptsatz 1.1, indem zunächst gezeigt wird, dass endlich viele symmetrische Tensorfelder  $h^{(1)}, \dots, h^{(m)} \in \mathcal{T}^2(M)$  existieren, so dass  $h := g - F_0^*(g^{can}) = \sum_{l=1}^m h^{(l)}$  gilt. Die hierbei konstruierten Tensorfelder  $h^{(1)}, \dots, h^{(m)} \in \mathcal{T}^2(M)$  haben die Eigenschaft, dass sie jeweils kompakt in einer Koordinatenumgebung liegen, bezüglich der sie eine gewisse besondere Koordinatendarstellung haben. Ist diese Zerlegungseigenschaft der Metrik  $h$  bewiesen, dann reicht es zu zeigen, dass für eine gegebene freie Abbildung  $F_l \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$ , für  $l \in \{0, \dots, m-1\}$ ,

eine freie Abbildung  $F_{l+1} \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$  existiert, so dass die Gleichungen:

$$\begin{aligned} F_{l+1}^*(g^{can}) &= F_l^*(g^{can}) + h^{(l)} \\ F_{l+1}^*(g^{can})(x) &= F_l^*(g^{can})(x) \quad \text{für alle } x \in M \setminus U_l \end{aligned}$$

und die Abschätzung:

$$\max_{x \in M} |F_{l+1}(x) - F_l(x)|_{\mathbb{R}^q} \leq \delta$$

wobei  $\{(U_l, \varphi_l)\}_{1 \leq l \leq m} \subseteq \mathcal{A}$ , die in Kapitel 3 konstruierten Karten beschreiben, erfüllt sind. Mithilfe dieses Resultates wird das Problem in eine lokale Fragestellung überführt. Da für die Karten  $\varphi_l(U_l) = B_{1+\tau}(0)$ , für  $l \in \{1, \dots, m\}$  gilt, werden in den darauffolgenden Betrachtungen lokale Resultate auf  $\mathbb{B} := B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n$  hergeleitet. In Kapitel 4 wird ein  $l \in \{1, \dots, m\}$  fixiert, und es werden aus einer gegebenen freien Abbildung  $F_0 \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  für  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , freie Abbildungen  $F_{\epsilon,k} \in (\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , mit  $\epsilon \in (0, \epsilon_k]$  konstruiert, so dass für  $k \geq 2$  die Eigenschaften:

$$\begin{aligned} F_{\epsilon,k}^*(g^{can}) &= F_0^*(g^{can}) + h^{(l)} + \epsilon^{k+1} f_{\epsilon,k} \\ F_{\epsilon,k}(x) - F_0(x) &\in C_0^\infty(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q) \\ \max_{x \in \mathbb{B}} |F_{\epsilon,k}(x) - F_0(x)|_{\mathbb{R}^q} &\leq C(k) \cdot \epsilon \end{aligned}$$

für eine, von  $\epsilon$  unabhängige Konstante  $C(k) \in \mathbb{R}_{>0}$ , auf  $\mathbb{B}$  erfüllt sind. Hierbei ist  $f_{\epsilon,k} \in C_0^\infty(\mathbb{B})$  eine Störung, die in einer kompakten, von  $\epsilon$  und  $k$  unabhängigen, Menge  $K \subseteq \mathbb{B}$  liegt, welche auch den Träger von  $h^{(l)}$  beinhaltet. Diese Störung hat besondere Eigenschaften. In Kapitel 6 werden feste offene Mengen  $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{B}$  mit  $K \subseteq U_1$ ,  $\overline{U_1} \subseteq U_2$  sowie  $\overline{U_2} \subseteq \mathbb{B}$  gewählt, und gezeigt, dass sich für eine hinreichend große Wahl von  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , und eine hinreichend kleine Wahl von  $\epsilon \in (0, \epsilon_k]$ , die Funktion  $F_{\epsilon,k} \in (\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , durch Perturbation, in eine freie Abbildung  $F \in C^\infty(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)$  überführen lässt, so dass der Störterm  $f_{\epsilon,k}$  verschwindet. Dabei wird gewährleistet, dass  $F_{\epsilon,k}(x) = F(x)$ , für alle  $x \in \mathbb{B} \setminus U_2$ , gilt. Das hierfür verwendete Resultat, zur Lösung dieses lokalen Perturbationsproblems, wird in Kapitel 5 hergeleitet. Damit ist Hauptsatz 1.1 gezeigt. Mit Kapitel 2 folgt dann:

**Hauptsatz 1.2** *Es sei  $(M, g)$  eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ , dann existiert für  $q(n) := \max\{\frac{n}{2}(n+5), \frac{n}{2}(n+3)+5\}$  eine freie Einbettung  $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$ , so dass  $F^*(g^{can}) = g$  gilt.*

In Kapitel 7 wird, aufbauend auf Hauptsatz 1.2, eine selbst entwickelte Methode be-

schrieben, die es ermöglicht, eine 1-parametrische Familie von Riemannschen Metriken in einen euklidischen Vektorraum isometrisch einzubetten. Von Interesse ist hierbei die glatte Abhängigkeit der Einbettungen vom Parameter.

## 2 Existenzsätze für freie Einbettungen

In diesem Kapitel wird der Begriff der freien Abbildung eingeführt, aus dem sich der Begriff der freien Einbettung ergibt. Für diese Abbildungen werden wesentliche Eigenschaften zusammengetragen, und anschließend Existenzsätze herausgearbeitet. Die Vorgehensweise wurde hierbei [And02, 2.3.] und [GR70, 2.5.3.] entnommen.

### 2.1 Begriffsklärung

**Definition 2.1** Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ ,  $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$ ,  $p \in M$ , und  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$  eine Karte, mit  $p \in U$ . Dann wird der Vektorraum:

$${}^\varphi D_p^2(F) := \text{lin} \left( \{\partial_i {}^\varphi F(\varphi(p))\}_{1 \leq i \leq n} \cup \{\partial_i \partial_j {}^\varphi F(\varphi(p))\}_{1 \leq i \leq j \leq n} \right) \subseteq \mathbb{R}^q$$

als **Raum aller Ableitungen von  $F$  bis zur zweiten Ordnung in  $p$  bezüglich  $(U, \varphi)$**  bezeichnet.

Es wird gezeigt, dass dieser Begriff unabhängig von der Wahl der Karte  $(U, \varphi)$  ist, hierbei wird auch auf [GR70, 1.2.3.] verwiesen:

**Lemma 2.1** Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ ,  $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$ ,  $p \in M$ , und  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ , sowie  $(V, \psi) \in \mathcal{A}$  Karten, mit  $p \in U \cap V$ . Dann gilt:

$${}^\varphi D_p^2(F) = {}^\psi D_p^2(F)$$

*Beweis.* Es gilt für  $j \in \{1, \dots, n\}$ :

$$\begin{aligned} \partial_j {}^\varphi F(\varphi(p)) &= \partial_j (F \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = \partial_j (F \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \\ &= \sum_{k=1}^n \partial_k (F \circ \psi^{-1})(\psi(p)) \cdot \partial_j (\psi^k \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = \sum_{k=1}^n \partial_k {}^\psi F(\psi(p)) \cdot \partial_j (\psi^k \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \end{aligned}$$


---



und für  $i \in \{1, \dots, n\}$ :

$$\begin{aligned}
\partial_i \partial_j {}^\varphi F(\varphi(p)) &= \sum_{k,l=1}^n \partial_k \partial_l (F \circ \psi^{-1})(\psi(p)) \cdot \partial_j (\psi^k \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot \partial_i (\psi^l \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \partial_k (F \circ \psi^{-1})(\psi(p)) \cdot \partial_i \partial_j (\psi^k \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \\
&= \sum_{k,l=1}^n \partial_k \partial_l {}^\psi F(\psi(p)) \cdot \partial_j (\psi^k \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot \partial_i (\psi^l \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \partial_k {}^\psi F(\psi(p)) \cdot \partial_i \partial_j (\psi^k \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))
\end{aligned}$$

Also gilt  ${}^\varphi D_p^2(F) \subseteq {}^\psi D_p^2(F)$ . Vertauschung von  $\varphi$  und  $\psi$  ergibt  ${}^\psi D_p^2(F) \subseteq {}^\varphi D_p^2(F)$ , womit die Behauptung gezeigt ist.  $\square$

Dieses Lemma rechtfertigt die folgende Festlegung:

**Definition 2.2** Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit,  $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$ ,  $p \in M$ , und  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ , eine Karte mit  $p \in U$ . Dann wird der Vektorraum:

$$D_p^2(F) := {}^\varphi D_p^2(F)$$

als **Raum aller Ableitungen von  $F$  bis zur zweiten Ordnung in  $p$**  bezeichnet.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\dim {}^\varphi D_p^2(F) &\leq \dim [\text{lin}(\{\partial_i {}^\varphi F(\varphi(p))\}_{1 \leq i \leq n})] + \dim [\text{lin}(\{\partial_i \partial_j {}^\varphi F(\varphi(p))\}_{1 \leq i \leq j \leq n})] \\
&\leq n + \frac{n}{2}(n+1) = \frac{2n}{2} + \frac{n}{2}(n+1) = \frac{n}{2}(n+3)
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Abschätzung:

$$0 \leq \dim D_p^2(F) \leq \min \left\{ q, \frac{n}{2}(n+3) \right\} \quad (2.1)$$

Eine besondere Bedeutung haben Abbildungen, bei denen, für  $q \geq \frac{n}{2}(n+3)$ , die Abschätzung (2.1) mit Gleichheit angenommen wird:

**Definition 2.3** Eine Abbildung  $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$ , auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $M$ ,

heißt **freie Abbildung**, falls:

$$\dim D_p^2(F) = \frac{n}{2}(n+3)$$

für alle  $p \in M$  gilt. Falls  $F$  eine glatte Einbettung ist, dann wird  $F$  als **freie Einbettung** bezeichnet.

## 2.2 Grundlegende Eigenschaften von freien Abbildungen

Mit (B.5) ist jede freie Abbildung eine Immersion. Ist  $M$  kompakt, dann ist mit [Lee03, Proposition 7.4.], jede injektive freie Abbildung bereits eine freie Einbettung. Weiterhin gilt:

**Lemma 2.2** *Gegeben seien  $n$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeiten  $(M, \mathcal{O}_M, \mathcal{A}_M)$  und  $(N, \mathcal{O}_N, \mathcal{A}_N)$ , sowie eine Immersion  $G \in C^\infty(M, N)$ , und eine freie Abbildung  $F \in C^\infty(N, \mathbb{R}^q)$ , dann ist die Verknüpfung  $F \circ G$  ebenfalls eine freie Abbildung.*

*Beweis.* Sei  $p \in M$ , mit [Lee03, Theorem 7.13] existieren Karten  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_M$  und  $(V, \psi) \in \mathcal{A}_N$ , mit  $p \in U$  und  $F(U) \subseteq V$ , so dass für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  und  $x \in U$  die Gleichung:

$$\partial_j^\varphi G^i(\varphi(x)) = \delta_j^i \quad (2.2)$$

gilt, dann ist für  $j \in \{1, \dots, n\}$ :

$$\begin{aligned} \partial_j^\varphi (F \circ G)(\varphi(p)) &= \partial_j (F \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ G \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \\ &= \sum_{k=1}^n \partial_k^\psi F(\psi(G(p))) \cdot \partial_j^\varphi G^k(\varphi(p)) \stackrel{(2.2)}{=} \sum_{k=1}^n \partial_k^\psi F(\psi(G(p))) \cdot \delta_j^k = \partial_j^\psi F(\psi(G(p))) \end{aligned} \quad (2.3)$$

und für  $i \in \{1, \dots, n\}$ , ausgehend von der Rechnung (2.3):

$$\partial_i \partial_j^\varphi (F \circ G)(\varphi(p)) = \partial_i \partial_j^\psi F(\psi(G(p)))$$

Damit gilt:  $\dim(D_p^2(F \circ G)) = \dim(D_{G(p)}^2(F)) = \frac{n}{2}(n+3)$ , womit gezeigt ist, dass  $F \circ G$  eine freie Abbildung ist. □

In Abschnitt 2.5 wird das folgende Lemma von Bedeutung sein, welches direkt aus der

Konstruktion des Atlas, einer eingebetteten Untermannigfaltigkeit folgt, siehe hierfür auch Definition B.33.

**Lemma 2.3** *Gegeben sei eine eingebettete Untermannigfaltigkeit  $S$ , einer glatten Mannigfaltigkeit  $M$ , und eine freie Abbildung  $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$ . Dann ist die Abbildung:  $F|_S : S \longrightarrow \mathbb{R}^q$  ebenfalls eine freie Abbildung.*

## 2.3 Freie Einbettung einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

Eine freie Einbettung auf einer offenen Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  kann direkt angegeben werden, wie der Beweis des folgenden Satzes zeigt:

**Satz 2.1** *Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge, dann existiert eine freie Einbettung  $F_0 \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+3)})$ .*

*Beweis.* Es sei  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n} \cup \{e_{ij}\}_{1 \leq i \leq j \leq n}$  eine Orthonormalbasis des Raumes  $\mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+3)}$ . Damit wird die folgende Abbildung definiert:

$$F_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+3)}$$

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto \sum_{i=1}^n x^i e_i + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x^i x^j e_{ij}$$

Zunächst wird gezeigt, dass die Abbildung  $F_0$  injektiv ist. Seien dazu  $x, y \in \Omega$  mit  $F(x) = F(y)$ , dann gilt insbesondere:

$$\sum_{i=1}^n x^i e_i = \sum_{i=1}^n y^i e_i$$

also sind  $x$  und  $y$  identisch. Für  $l \in \{1, \dots, n\}$  gilt:

$$\begin{aligned} \partial_l F_0(x) &= \sum_{i=1}^n \delta_l^i e_i + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \partial_l (x^i x^j) e_{ij} = e_l + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \delta_l^i x^j e_{ij} + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x^i \delta_l^j e_{ij} \\ &= e_l + \sum_{l \leq j \leq n} x^j e_{lj} + \sum_{1 \leq i \leq l} x^i e_{il} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Für ein weiteres  $k \in \{1, \dots, l\}$  ist dann:

$$\partial_k \partial_l F_0(x) = \begin{cases} e_{kl} & \text{falls } k < l \\ 2e_{kk} & \text{falls } k = l \end{cases}$$

womit gezeigt ist, dass  $F_0$  eine freie Abbildung ist. Darüber hinaus ist die inverse Abbildung  $F_0^{-1} : F_0(\Omega) \rightarrow \Omega$  stetig, denn sind für ein gegebenes  $\epsilon \in \mathbb{R}$ ,  $x, y \in \Omega$  mit  $|F_0(x) - F_0(y)|_{\mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+3)}} < \epsilon$ , so folgt daraus direkt:

$$\begin{aligned} |x - y|_{\mathbb{R}^n} &= \left| \sum_{i=1}^n x^i e_i - \sum_{i=1}^n y^i e_i \right|_{\mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+3)}} = \left| \sum_{i=1}^n (x^i - y^i) e_i \right|_{\mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+3)}} \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n (x^i - y^i) e_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x^i x^j - y^i y^j) e_{ij} \right|_{\mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+3)}} = |F_0(x) - F_0(y)|_{\mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+3)}} < \epsilon \end{aligned}$$

□

## 2.4 Einbettungssatz für eine kompakte Mannigfaltigkeit

Um einen Existenzsatz für eine freie Abbildung auf einer Mannigfaltigkeit zu zeigen, erweist es sich als nützlich, die Mannigfaltigkeit zunächst in einen Vektorraum  $\mathbb{R}^q$  einzubetten, wobei man vorübergehend keine Kontrolle über die Raumdimension  $q \in \mathbb{N}$  haben möchte. Dazu dient das folgende Lemma, vergleiche hierfür auch [Hir94, Chapter 1, 3.4. Theorem]:

**Lemma 2.4** *Gegeben sei eine kompakte  $n$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit  $M$ , dann existiert für ein  $q(n, M) \in \mathbb{N}$  eine glatte Einbettung  $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$ .*

*Beweis.* Mit [Lee03, Proposition 2.24] und der Kompaktheit von  $M$ , existieren endlich viele Karten  $(W_1, \varphi_1), \dots, (W_r, \varphi_m) \in \mathcal{A}$ , mit  $\varphi(W_i) = B_3(0)$  für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$ , so dass die Mengen  $U_i := \varphi_i^{-1}(\mathbb{B})$ , für  $i \in \{1, \dots, m\}$ , in ihrer Gesamtheit die Mannigfaltigkeit  $M$  überdecken. Weiterhin wird mit [Lee03, Lemma 2.22] eine Funktion  $H \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  gewählt, welche die Eigenschaften  $H|_{\mathbb{B}} \equiv 1$ ,  $\text{supp}(H) = \overline{B_2(0)}$  und  $H(\mathbb{R}^n) = [0, 1]$  erfüllt. In der folgenden Definition werden für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$  die Funktionen  $H \circ \varphi_i$  und  $\varphi_i^T H \circ \varphi_i$  außerhalb von  $W_i$  durch 0 konstant fortgesetzt, eine neue Bezeichnung soll nicht verwendet werden. Aus diesen Funktionen wird eine Funktion  $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^{m(n+1)})$  wie folgt konstruiert:

$$F := \left( (H \circ \varphi_i)_{1 \leq i \leq m}, (\varphi_i^T H \circ \varphi_i)_{1 \leq i \leq m} \right)^T$$

Um zu zeigen, dass  $F$  eine glatte Einbettung ist, genügt es, aufgrund der Kompaktheit von  $M$ , mit [Lee03, Proposition 7.4] zu zeigen, dass  $F$  eine injektive Immersion ist. Zunächst die Injektivität: Sind  $x, y \in M$  mit  $F(x) = F(y)$ , so existiert ein  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,

mit  $x \in U_i$ . Dann gilt, wegen  $F(x) = F(y)$ , die Gleichung  $(H \circ \varphi_i)(x) = (H \circ \varphi_i)(y) = 1$  und es muss die Aussage  $y \in U_i$  gelten. Aufgrund der Definition von  $F$  gilt dann die Gleichung  $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$ . Als Kartenabbildung ist  $\varphi_i$  insbesondere injektiv, und es folgt  $x = y$ .  $F$  ist auch eine Immersion, denn für ein festes  $x \in M$  existiert ein  $i \in \{1, \dots, m\}$  mit  $x \in U_i$ . Die Jacobimatrix der Komponente  $(\varphi_i^T H \circ \varphi_i)$  von  $F$ , bezüglich der Kartenabbildung  $\varphi_i$ , ist im Punkt  $x$ , nach Wahl von  $H$ , die  $n$ -dimensionale Einheitsmatrix. Die Ableitung von  $F$  besitzt damit in  $x$ , unter Beachtung von (B.5), den maximalen Rang  $n$ . Da  $x \in M$  beliebig war, ist  $F$  eine Immersion.  $\square$

Nun wird gezeigt, dass sich die in Lemma 2.4 hergeleitete Raumdimension  $q$  immer, unabhängig von der konkreten Gestalt von  $M$ , auf  $2n + 1$  reduzieren lässt. Nebenbei ergibt sich noch ein Existenzsatz für Immersionen. Dieser Satz wird auch als „Einbettungssatz von Whitney“ bezeichnet, vergleiche hierfür [Hir94, Chapter 1, 3.5. Theorem], oder mit einer etwas anderen Beweisidee [Lee03, Theorem 10.11].

**Satz 2.2** *Für jede kompakte  $n$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit  $M$  existiert eine glatte Einbettung in den Raum  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , und eine Immersion in den Raum  $\mathbb{R}^{2n}$ .*

Für den Beweis dieses Satzes werden einige maßtheoretische Begriffe und Zusammenhänge eingeführt:

**Definition 2.4** *Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit, dann heißt eine Menge  $A \subseteq M$  **Nullmenge in  $M$** , falls für alle  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$  die Menge  $\varphi(A \cap U)$  eine Lebesgue-Nullmenge in  $\mathbb{R}^n$  ist.*

Die folgende wichtige Tatsache wird in [Lee03, Theorem 10.5] gezeigt:

**Lemma 2.5** *Seien  $M$  und  $N$  glatte Mannigfaltigkeiten mit  $\dim(M) < \dim(N)$  und sei  $F \in C^\infty(M, N)$ . Dann ist die Menge  $F(M)$  eine Nullmenge in  $N$ . Insbesondere ist  $N \setminus F(M)$  eine dichte Teilmenge von  $N$ .*

Des Weiteren wird eine alternative Charakterisierung von eingebetteten Untermannigfaltigkeiten verwendet.

**Lemma 2.6** *Seien  $M$  und  $N$  glatte Mannigfaltigkeiten und  $F \in C^\infty(M, N)$  eine glatte Einbettung, dann ist die Menge  $F(M)$  eine eingebettete Untermannigfaltigkeit.*

Lemma 2.6 entspricht [Lee03, Theorem 8.3.]. Nun zum Beweis von Satz 2.2:

*Beweis.* Mit Lemma 2.4, Lemma 2.6 und Lemma 2.2 reicht es, die Aussagen für eine kompakte eingebettete Untermannigfaltigkeit eines Vektorraumes  $\mathbb{R}^q$  zu zeigen. Es wird gezeigt, dass wenn  $q > 2n + 1$ , beziehungsweise  $q > 2n$  gilt, dann existiert ein  $v \in \mathbb{S}^{q-1}$ , so dass die Orthogonalprojektion:

$$\begin{aligned} \pi_v : M &\longrightarrow \text{lin}\{v\}^\perp \\ x &\mapsto x - (x \cdot v) v \end{aligned} \tag{2.5}$$

eine glatte Einbettung, beziehungsweise eine Immersion ist. Die Behauptungen des Satzes folgen, wegen  $\dim(\text{lin}\{v\}^\perp) = q - 1$ , durch eine endliche Hintereinanderausführung dieser Projektionen. Für diese sukzessive Reduktion werden zwei Argumente benötigt, die zur besseren Übersicht zunächst getrennt voneinander behandelt werden:

**Lemma 2.7** *Falls  $q > 2n + 1$  gilt, dann ist die Menge:*

$$V_1 := \{v \in \mathbb{S}^{q-1} : \pi_v \text{ ist injektiv} \}$$

*eine dichte Teilmenge von  $\mathbb{S}^{q-1}$ .*

*Beweis.* Betrachte für  $\Delta := \{(x, y) \in M \times M : x = y\}$  die glatte Abbildung:

$$\begin{aligned} h : (M \times M) \setminus \Delta &\longrightarrow \mathbb{S}^{q-1} \\ (x, y) &\mapsto \frac{x - y}{|x - y|} \end{aligned}$$

Hierbei ist die Menge  $(M \times M) \setminus \Delta$  als offene Untermannigfaltigkeit der glatten Produktmannigfaltigkeit  $M \times M$  aufzufassen, siehe hierfür auch Definition B.22 und Definition B.27. Es wird gezeigt, dass die Äquivalenz:

$$v \notin h((M \times M) \setminus \Delta) \iff \pi_v \text{ injektiv} \tag{2.6}$$

gilt. Dazu werde angenommen,  $\pi_v$  sei nicht injektiv. Dies ist gleichbedeutend damit, dass ein  $(x, y) \in (M \times M) \setminus \Delta$  existiert, so dass  $\pi_v(x) = \pi_v(y)$  gilt. Das heißt:

$$\begin{aligned} x - (x \cdot v) v &= y - (y \cdot v) v \\ \Leftrightarrow x - y &= (x \cdot v) v - (y \cdot v) v \\ &= [(x \cdot v) - (y \cdot v)] v \\ &= [(x - y) \cdot v] v \end{aligned}$$

Da  $v \in \mathbb{S}^{q-1}$  gilt, ist diese Gleichheit äquivalent zu  $v = \pm \frac{x-y}{|x-y|}$ , beziehungsweise  $v \in h(M \times M \setminus \Delta)$ , womit (2.6) gezeigt ist. Es folgt die Charakterisierung  $V_1 = \mathbb{S}^{q-1} \setminus h((M \times M) \setminus \Delta)$ . Aufgrund der Abschätzung:

$$\dim((M \times M) \setminus \Delta) = 2n < q - 1 = \dim(\mathbb{S}^{q-1})$$

ist die Menge  $V_1$ , mit Lemma 2.5, eine dichte Teilmenge von  $\mathbb{S}^{q-1}$ .

□

**Lemma 2.8** *Falls  $q > 2n$  gilt, dann ist die Menge:*

$$V_2 := \{v \in \mathbb{S}^{q-1} : \pi_v \text{ ist eine Immersion} \}$$

*eine offene dichte Teilmenge von  $\mathbb{S}^{q-1}$ .*

*Beweis.* Für die folgende Definition sei erwähnt, dass für jedes  $p \in M$  der Tangentialraum  $T_p M$ , über die Ableitung der Inklusionsabbildung  $i : M \rightarrow \mathbb{R}^q$ , welche mit [Lee03, Theorem 8.2] glatt ist, als Unterraum von  $T_p \mathbb{R}^q$  aufgefasst werden kann, siehe hierfür auch [Lee03, Chapter 8, The Tangent Space to an Embedded Submanifold]. Der Raum  $T_p \mathbb{R}^q$  wird mit den Identifikationen in [Lee03, Chapter 3] als  $\mathbb{R}^q$  angesehen. Die Menge:

$$SM := \coprod_{p \in M} \{w \in T_p M : |w|_{\mathbb{R}^q} = 1\} \quad (2.7)$$

wird als glatte Mannigfaltigkeit der Dimension  $2n - 1$  aufgefasst, siehe hierfür auch [Hir94, Chapter 1, Section 3]. Betrachte die glatte Abbildung:

$$\begin{aligned} \pi_1 : SM &\rightarrow \mathbb{S}^{q-1} \\ (w, p) &\mapsto w \end{aligned}$$

Es wird gezeigt, dass die Äquivalenz:

$$v \notin \pi_1(SM) \iff \pi_v \text{ ist eine Immersion} \quad (2.8)$$

gilt. Betrachte dazu, für  $v \in \mathbb{S}^{q-1}$ , die Abbildung  $\pi_v$  auf ganz  $\mathbb{R}^q$ , und bezeichne diese mit  $\hat{\pi}_v$ . Das bedeutet konkret:

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_v : \mathbb{R}^q &\rightarrow \mathbb{R}^q \\ x &\mapsto x - (x \cdot v) v \end{aligned}$$

Für einen festen Punkt  $p \in M$  gilt, wegen  $v \in \mathbb{S}^{q-1}$ ,  $\text{Kern}(\widehat{\pi}_{v*}) = \text{lin}\{v\} \subseteq T_p\mathbb{R}^q$ . Da wegen  $\pi_v = \widehat{\pi}_v \circ i$ , mit der Inklusion  $i : M \rightarrow \mathbb{R}^q$ , die Gleichheit  $\text{Kern}(\pi_{v*}) = \text{Kern}(\widehat{\pi}_{v*}) \cap T_p M = \text{lin}\{v\} \cap T_p M$  gilt, ist  $\pi_v$  genau dann eine Immersion, wenn  $v \notin T_p M$  für jedes  $p \in M$ , beziehungsweise  $v \notin \pi_1(SM)$  gilt. Damit ist (2.8) bewiesen, und es folgt  $V_2 = \mathbb{S}^{q-1} \setminus \pi_1(SM)$ .

Aus der Kompaktheit der Mannigfaltigkeit  $M$  folgt die Kompaktheit von  $SM$ . Wegen der Stetigkeit von  $\pi_1$  ist die Menge  $\pi_1(SM)$  kompakt, und damit insbesondere abgeschlossen in  $\mathbb{S}^{q-1}$ , woraus die Offenheit der Menge  $V_2$  folgt. Ferner folgt aus der Abschätzung:

$$\dim(SM) = 2n - 1 < q - 1 = \dim(\mathbb{S}^{q-1})$$

mit Lemma 2.5 die Dichtheit der Menge  $V_2$  in  $\mathbb{S}^{q-1}$ . □

Aus den Argumenten in Lemma 2.7 und Lemma 2.8 ergibt sich die Aussage:

$$V_1 \cap V_2 = \{v \in \mathbb{S}^{q-1} : \pi_v \text{ ist eine injektive Immersion}\} \neq \emptyset$$

Wegen der Kompaktheit von  $M$  ist, mit [Lee03, Proposition 7.4], jede injektive Immersion eine glatte Einbettung. Somit ist für  $q > 2n + 1$ :

$$V_1 \cap V_2 = \{v \in \mathbb{S}^{q-1} : \pi_v \text{ ist eine glatte Einbettung}\} \neq \emptyset$$

Solange also die Raumdimension  $q$  größer als  $2n + 1$  ist, existiert ein  $v \in \mathbb{S}^{q-1}$ , so dass die Abbildung  $\pi_v : M \rightarrow \text{lin}\{v\}^\perp$  eine glatte Einbettung ist. □

In [Whi44a] und [Whi44b] wird, unter Verwendung anderer Beweismethoden, gezeigt, dass sich die Dimensionen in Satz 2.2, für  $n > 1$ , jeweils um 1 reduzieren lassen, das heißt es existiert eine glatte Einbettung in den Raum  $\mathbb{R}^{2n}$  und eine Immersion in den Raum  $\mathbb{R}^{2n-1}$ .

## 2.5 Freie Einbettung einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit

Die bisherigen Betrachtungen werden nun zum zentralen Existenzsatz, für eine freie Einbettung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ausgebaut:



**Satz 2.3** *Gegeben sei eine kompakte  $n$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(M, g)$ , dann existiert eine freie Einbettung  $F_0 \in C^\infty(M, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+5)})$ , so dass  $g - F_0^*(g^{\text{can}})$  eine Riemannsche Metrik auf  $M$  ist.*

*Beweis.* Mit Satz 2.2 existiert eine glatte Einbettung  $F_E \in C^\infty(M, \mathbb{R}^{2n+1})$ , und mit Satz 2.1 lässt sich eine freie Einbettung  $F_f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n+1}, \mathbb{R}^{(2n+1)(n+2)})$  finden. Ferner kann mit Lemma 2.6 die Menge  $F_E(M)$  als eingebettete Untermannigfaltigkeit des Raumes  $\mathbb{R}^{2n+1}$  aufgefasst werden, und mit Lemma 2.3 ist die Einschränkung  $F_f|_{F_E(M)} : F_E(M) \rightarrow \mathbb{R}^{(2n+1)(n+2)}$  eine freie Abbildung auf  $F_E(M)$ . Daraus folgt, mit Lemma 2.2, dass die Komposition  $F_f \circ F_E : M \rightarrow \mathbb{R}^{(2n+1)(n+2)}$  eine freie Einbettung auf  $M$  ist. Die Raumdimension  $(2n+1)(n+2)$  ist aber größer als  $\frac{n}{2}(n+5)$ .

Aufbauend auf Satz 2.2 soll für eine gegebene freie Einbettung  $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$  ein geeignetes  $v \in \mathbb{S}^{q-1}$  bestimmt werden, so dass wenn  $q > \frac{n}{2}(n+5)$  erfüllt ist, die Abbildung  $\pi_v \circ F : M \rightarrow \text{lin}\{v\}^\perp$  eine freie Einbettung ist, hierbei ist  $\pi_v$  die Orthogonalprojektion aus (2.5). Um das zu erreichen, wird, neben den beiden in Satz 2.2 verwendeten Reduktionsargumenten, ein weiteres benötigt:

**Lemma 2.9** *Falls  $q > \frac{n}{2}(n+5)$  gilt, dann ist die Menge:*

$$V_3 := \{v \in \mathbb{S}^{q-1} : \pi_v \circ F \text{ ist eine freie Abbildung}\}$$

*eine offene dichte Teilmenge in  $\mathbb{S}^{q-1}$ .*

Definiere:

$$SD^2(F) := \coprod_{p \in M} \{w \in D_p^2(F) : |w|_{\mathbb{R}^q} = 1\} \quad (2.9)$$

Mit [GR70, 2.5] kann die Menge  $SD^2(F)$  als glatte Mannigfaltigkeit der Dimension  $\frac{n}{2}(n+5) - 1$  aufgefasst werden. Betrachte die glatte Abbildung:

$$\begin{aligned} \pi_2 : SD^2(F) &\longrightarrow \mathbb{S}^{q-1} \\ (w, p) &\mapsto w \end{aligned}$$

Es wird die folgende Aussage gezeigt:

$$v \notin \pi_2(SD^2(F)) \iff \pi_v \circ F \text{ ist eine freie Abbildung} \quad (2.10)$$

Angenommen  $\pi_v \circ F$  ist keine freie Abbildung, was genau dann der Fall ist, wenn ein  $p \in M$ , ein  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ , und eine nichttriviale Auswahl von Koeffizienten  $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq n} \cup$

$\{\lambda_{ij}\}_{1 \leq i \leq j \leq n} \subseteq \mathbb{R}$  existiert, so dass:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \partial_i {}^\varphi(\pi_v \circ F)(\varphi(p)) + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \lambda_{ij} \partial_i \partial_j {}^\varphi(\pi_v \circ F)(\varphi(p)) = 0$$

Das ist gleichbedeutend mit:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \pi_v [\partial_i {}^\varphi F(\varphi(p))] + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \lambda_{ij} \pi_v [\partial_i \partial_j {}^\varphi F(\varphi(p))] = 0$$

beziehungsweise, nach eventueller Skalierung der Koeffizienten, und mit der Definition der Abbildung  $\pi_v$  in (2.5):

$$\begin{aligned} D_p^2(F) \cap \mathbb{S}^{q-1} &\ni \sum_{i=1}^n \lambda_i \partial_i {}^\varphi F(\varphi(p)) + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \lambda_{ij} \partial_i \partial_j {}^\varphi F(\varphi(p)) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i v \cdot \partial_i {}^\varphi F(\varphi(p)) v + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \lambda_{ij} v \cdot \partial_i \partial_j {}^\varphi F(\varphi(p)) v \\ &= v \cdot \left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i \partial_i {}^\varphi F(\varphi(p)) + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \lambda_{ij} \partial_i \partial_j {}^\varphi F(\varphi(p)) \right] v \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu:

$$v = \pm \sum_{i=1}^n \lambda_i \partial_i {}^\varphi F(\varphi(p)) + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \lambda_{ij} \partial_i \partial_j {}^\varphi F(\varphi(p)) \in D_p^2(F) \cap \mathbb{S}^{q-1}$$

beziehungsweise  $v \in \pi_2(SD^2(F))$ . Aussage (2.10) ist damit bewiesen, und es folgt die Charakterisierung  $V_3 = \mathbb{S}^{q-1} \setminus \pi_2(SD^2(F))$ .

Mit der Kompaktheit von  $M$  lässt sich die Kompaktheit von  $SD^2(F)$  zeigen, woraus, mit der Stetigkeit von  $\pi_2$ , die Offenheit von  $V_3$  folgt. Die Dichtheit der Menge  $V_3$  in  $\mathbb{S}^{q-1}$  folgt mit Lemma 2.5 aus der Abschätzung:

$$\dim(SD^2(F)) = \frac{n}{2}(n+5) - 1 < q - 1 = \dim(\mathbb{S}^{q-1})$$

Ist  $q > \frac{n}{2}(n+5)$  erfüllt, womit auch  $q > 2n+1$  erfüllt ist, so ergibt sich, unter Beachtung von Lemma 2.7 und Lemma 2.8, die Aussage:

$$\{v \in \mathbb{S}^{q-1} : \pi_v \circ F \text{ ist eine freie Einbettung}\} \supseteq V_1 \cap V_2 \cap V_3 \neq \emptyset$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Reduktionsargumente lässt sich eine freie Einbettung in den Raum  $\mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+5)}$  konstruieren. Der Einfachheit halber werde diese Abbildung wieder mit  $F$  bezeichnet.

Es bleibt zu untersuchen, wie aus dieser Abbildung eine freie Einbettung  $F_0$  konstruiert werden kann, so dass  $g - F_0^*(g^{can})$  eine Riemannsche Metrik auf  $M$  ist. Das heißt, dass in jedem Punkt  $p \in M$  der Tensor  $g(p) - F_0^*(g^{can})(p) \in T^2(T_p M)$  positiv definit sein soll. Dies lässt sich, unter Verwendung der Kompaktheit von  $M$ , durch eine Skalierung von  $F$  erreichen:

Das **Einheitstangentialbündel**:

$$UM := \coprod_{p \in M} \{X \in T_p M : |X|_g = 1\}$$

ist mit [Lee03, Theorem 8.8] eine eingebettete Untermannigfaltigkeit des, in [Lee03, Lemma 4.1] konstruierten, Tangentialbündels  $TM$ . Ist  $M$  kompakt, so ist auch  $UM$  kompakt. Für ein Tensorfeld  $\sigma \in \mathcal{T}^2(M)$  ist die Abbildung:

$$UM \ni (X, p) \mapsto \sigma(X, X) \in \mathbb{R}$$

stetig, und nimmt daher einen minimalen und einen maximalen Wert an. Sei nun  $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ , sowie  $p \in M$  und  $X \in T_p M$  mit  $|X|_g = 1$ , dann ist:

$$[g - \epsilon F^*(g^{can})](X, X) = 1 - \epsilon F^*(g^{can})(X, X) \geq 1 - \epsilon \max_{(Y, p) \in UM} F^*(g^{can})(Y, Y) \quad (2.11)$$

Da  $F^*(g^{can})$ , als Riemannsche Metrik, insbesondere positiv definit ist, existiert ein  $\epsilon_0 \in \mathbb{R}_{>0}$  mit:

$$\epsilon_0 < \frac{1}{\max_{(Y, p) \in UM} F^*(g^{can})(Y, Y)}$$

Mit (2.11) erfüllt die freie Einbettung  $F_0 := \epsilon_0 \cdot F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+5)})$  alle geforderten Eigenschaften, und der Satz ist bewiesen. □

Abschließend sei noch erwähnt, dass die in Satz 2.3 beschriebene Raumdimension  $\frac{n}{2}(n+5)$  nicht mehr reduziert werden kann, falls  $n = 2^k$  für ein  $k \geq 2$  gilt. Hierfür wird auf [È70] verwiesen.

## 3 Reduktion auf ein lokales Problem

Hauptgegenstand dieses Kapitels ist es zu zeigen, dass für eine gegebene Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(M, g)$ , und die in Abschnitt 2.5 konstruierte freie Einbettung  $F_0 \in C^\infty(M, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+5)})$ , die Riemannsche Metrik  $h := g - F_0^*(g^{can})$  als Summe von Tensorfeldern mit bestimmten wünschenswerten Eigenschaften dargestellt werden kann.

### 3.1 Dekomposition der Metrik

Der Inhalt des folgenden Satzes entspricht [Gün89b, Satz 2.2.] für den kompakten Fall. Das, in diesem Satz verwendete, Lemma 3.4 wird in Abschnitt 3.2 nachträglich bewiesen.

**Satz 3.1** *Es sei  $(M, h)$  eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann existieren glatte symmetrische kovariante 2-Tensorfelder  $h^{(1)}, \dots, h^{(m)} \in \mathcal{T}^2(M)$  mit den Eigenschaften:*

(i)

$$h = \sum_{i=1}^m h^{(i)}$$

(ii) *Für jedes  $i \in \{1, \dots, m\}$  existiert eine Karte  $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}$ , mit  $\varphi_i(U_i) = B_{1+\tau}(0)$ , für ein  $\tau > 0$ , und eine Abbildung  $a_i \in C^\infty(U_i)$  mit  $\text{supp}(a_i) \subseteq \varphi_i^{-1}(\mathbb{B})$ , so dass:*

$$h^{(i)}(x) = \begin{cases} a_i^4(x) |\varphi_i dx^1|_x^2 & \text{für } x \in U_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dem Beweis dieses Satzes wird eine Vorüberlegung vorangestellt: Betrachte die Menge von Abbildungen:

$$L(\mathbb{B}) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{B}) : f(x) = \sum_{i=1}^n c_i x^i \text{ für ein } (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n \right\} \quad (3.1)$$

Es sei  $p \in M$ , und  $(U_p, \varphi_p) \in \mathcal{A}$  ein um  $p$  zentrierter Koordinatenball mit dem Radius 1, das heißt:  $p \in U$ ,  $\varphi_p(p) = 0$  und  $\varphi_p(U_p) = \mathbb{B}$ . Aus einer Funktion  $f_p \in L(\mathbb{B})$  erhält man, durch Verknüpfung mit der Kartenabbildung  $\varphi_p$ , eine Abbildung  $f_p \circ \varphi_p \in C^\infty(U_p)$ . Für diese Abbildung ist der Pullback  $(f_p \circ \varphi_p)^*(g^{can}) \in \mathcal{T}^2(U_p)$  wohldefiniert, und hat unter Beachtung von (1.1) die Darstellung:

$$(f_p \circ \varphi_p)^*(g^{can}) = \partial_i^{\varphi_p}(f_p \circ \varphi_p) \cdot \partial_j^{\varphi_p}(f_p \circ \varphi_p) \cdot \varphi_p dx^i \otimes \varphi_p dx^j = \partial_i f_p \cdot \partial_j f_p \cdot \varphi_p dx^i \otimes \varphi_p dx^j \quad (3.2)$$

Sei darüber hinaus eine Abbildung  $\chi_p \in C_0^\infty(U_p)$  gegeben, dann ist  $\chi_p^4 \cdot (f_p \circ \varphi_p)^*(g^{can}) \in \mathcal{T}^2(U_p)$  wohldefiniert, und hat mit (3.2) die Darstellung:

$$\chi_p^4 \cdot (f_p \circ \varphi_p)^*(g^{can}) = \chi_p^4 \cdot \partial_i f_p \cdot \partial_j f_p \cdot \varphi_p dx^i \otimes \varphi_p dx^j = \chi_p^4 \cdot c_i^{(p)} c_j^{(p)} \cdot \varphi_p dx^i \otimes \varphi_p dx^j$$

Mittels trivialer Fortsetzung, wird  $\chi_p^4 \cdot (f_p \circ \varphi_p)^*(g^{can})$  absofort als glattes Tensorfeld in  $\mathcal{T}^2(M)$  aufgefasst. Es wird gezeigt, dass für dieses Tensorfeld eine Karte  $(U_p, \widehat{\varphi}_p) \in \mathcal{A}$ , und eine Abbildung  $a_p \in C_0^\infty(U_p)$  existiert, so dass:

$$\chi_p^4 \cdot (f_p \circ \varphi_p)^*(g^{can}) = \begin{cases} a_p^4 \cdot |\widehat{\varphi}_p dx^1|^2 & \text{in } U_p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.3)$$

Es sei  $A_{(p)} \in GL(n, \mathbb{R})$  die Matrix, deren Inverse in der ersten Spalte den Vektor  $c^{(p)}$  aus (3.1) enthält, und deren restlichen  $n - 1$  Spalten aus einer festen Basis des Untervektorraumes  $\text{lin}\{c^{(p)}\}^\perp$  bestehen. Definiere nun eine neue Karte  $(U_p, \widehat{\varphi}_p) \in \mathcal{A}$ , wie folgt:

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_p &: U_p \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \widehat{\varphi}_p &:= A_{(p)} \cdot \varphi_p \end{aligned}$$

Dann gilt für  $i \in \{1, \dots, n\}$ :

$$\begin{aligned} \partial_i^{\widehat{\varphi}_p}(f_p \circ \varphi_p) &= \partial_i(f_p \circ \varphi_p \circ \widehat{\varphi}_p^{-1}) = \partial_i(f_p \circ \varphi_p \circ (A_{(p)} \cdot \varphi_p)^{-1}) \\ &= \partial_i(f_p \circ \varphi_p \circ \varphi_p^{-1} \circ A_{(p)}^{-1}) = \partial_i(f_p \circ A_{(p)}^{-1}) = \sum_{k=1}^n \partial_k f_p \cdot (A_{(p)}^{-1})_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^n c_k^{(p)} \cdot (A_{(p)}^{-1})_{ki} = \begin{cases} |c^{(p)}|_{\mathbb{R}^n}^2 & \text{falls } i = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Damit hat  $\chi_p^4 \cdot (f_p \circ \varphi_p)^*(g^{can})$  in  $U_p$  die Darstellung:

$$\begin{aligned} \chi_p^4 \cdot (f_p \circ \varphi_p)^*(g^{can}) &= \chi_p^4 \partial_i \hat{\varphi}_p(f_p \circ \varphi_p) \cdot \partial_j \hat{\varphi}_p(f_p \circ \varphi_p) \hat{\varphi}_p dx^i \otimes \hat{\varphi}_p dx^j \\ &= (\chi_p \cdot |c^{(p)}|_{\mathbb{R}^n})^4 \cdot \hat{\varphi}_p dx^1 \Big|^2 \end{aligned}$$

womit (3.3) gezeigt ist. Nun zum Beweis von Satz 3.1:

*Beweis.* Es sei:

$$F := \left\{ (\partial_i f \cdot \partial_j f)_{1 \leq i \leq j \leq n} : f \in L(\mathbb{B}) \right\} \subseteq C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$$

definiert, wobei  $L(\mathbb{B})$  bereits in (3.1) festgelegt worden ist. Für jedes  $p \in M$  sei  $(U_p, \varphi_p)$  ein, um  $p$  zentrierter, Koordinatenball mit dem Radius 1. Aufgrund der stetigen Abhängigkeit der Eigenwerte von den Matrixeinträgen [Wer92, Satz 1.2.], existiert für jedes  $p \in M$  ein  $\epsilon_p > 0$ , so dass die Elemente der Menge:

$$W_p := \left\{ z \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)} : \max_{1 \leq i \leq j \leq n} |z_{ij} - \varphi_p h_{ij}(0)| < \epsilon_p \right\}$$

aufgefasst als symmetrische Matrizen in  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen, genau wie  $(\varphi_p h_{ij}(0))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  positiv definit sind. Mit [Sch97, Satz 1.11] besitzt jede beliebige positiv definite Matrix  $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Cholesky-Zerlegung, das heißt, es existiert eine Matrix  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $C_{ij} = 0$ , für  $1 \leq j < i \leq n$ , so dass  $Z = C^T C$ . Das bedeutet für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ :

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^n (C^T)_{ik} C_{kj} = \sum_{k=1}^n C_{ki} C_{kj} \quad (3.4)$$

Definiere nun, für jedes  $k \in \{1, \dots, n\}$ , eine Funktion  $f_k^z \in L(\mathbb{B})$ , gemäß der Bildungsvorschrift:

$$f_k^z(x) := \sum_{m=1}^n C_{km} x^m$$

Dann gilt mit (3.4) für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  die Gleichung  $z_{ij} = \sum_{k=1}^n \partial_i f_k^z(0) \cdot \partial_j f_k^z(0)$ . Damit sind alle Voraussetzungen von Lemma 3.4 auf Seite 28 erfüllt und es existiert für jedes  $p \in M$  ein  $\delta_p > 0$ , und ein  $l \in \mathbb{N}$ , sowie Abbildungen  $a_{p,1}, \dots, a_{p,l} \in C^\infty(B_{\delta_p}(0))$ ,

und  $f_{p,1}, \dots, f_{p,l} \in L(B_{\delta_p}(0))$ , so dass:

$$\varphi_p h_{ij}(x) = \sum_{k=1}^l a_{p,k}^4(x) \partial_i f_{p,k}(x) \cdot \partial_j f_{p,k}(x)$$

für alle  $x \in B_{\delta_p}(0)$  gilt. Nach Umskalierung der Kartenabbildungen wird nun angenommen, dass für alle  $p \in M$  die Gleichheit  $\delta_p = 1 + \tau$ , für ein von  $p$  unabhängiges  $\tau \in (0, 1)$  gilt, dabei sollen für die Kartenabbildungen keine neuen Bezeichnungen eingeführt werden. Nun werden, unter Verwendung der Kompaktheit von  $M$ , endlich viele  $p_1, \dots, p_m \in M$  gewählt, so dass:

$$M = \bigcup_{i=1}^m \varphi_{p_i}^{-1}(B_{1-\tau}(0))$$

Mit [Lee03, Theorem 2.25] existieren Abbildungen  $\psi_1, \dots, \psi_m \in C^\infty(M)$ , mit  $\text{supp}(\psi_i) \subseteq \varphi_{p_i}^{-1}(B_{1-\tau}(0))$  für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$ , und  $\sum_{i=1}^m \psi_i^4 \equiv 1$  auf ganz  $M$ . Mit der Vorüberlegung am Anfang des Abschnittes, ist gezeigt, dass für jedes  $i \in \{1, \dots, m\}$  das Tensorfeld  $\psi_i^4 \cdot h \in \mathcal{T}^2(M)$  eine Summe von Tensorfeldern mit der Eigenschaft (ii) ist. Wegen  $\sum_{i=1}^m \psi_i^4 \equiv 1$  ist der Satz bewiesen.  $\square$

Eine weitere Möglichkeit, Satz 3.1 zu beweisen, wird in [HH06, Lemma 1.3.1] gezeigt, dabei wird das lokale Einbettungsergebnis aus [GR70, 2.8.1.] verwendet. Ausgehend von Satz 3.1, wird nun der folgende Satz formuliert, welcher in Kapitel 6 bewiesen werden wird. Dieser überführt die globale Problemstellung in eine lokale. Der Beweis von Satz 3.2 erfordert eine Vielzahl von technischen Hilfsmitteln, die in den Kapiteln 4 und 5 behandelt werden.

**Satz 3.2** *Gegeben sei eine  $n$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit  $M$ , und eine freie Einbettung  $F_0 \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$ , mit  $q \geq \frac{n}{2}(n+3) + 5$ . Weiterhin sei ein glattes symmetrisches kovariantes 2-Tensorfeld  $h \in \mathcal{T}^2(M)$  gegeben, für das eine Karte  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ , mit  $\varphi(U) = B_{1+\tau}(0)$ , für  $\tau > 0$ , und eine Abbildung  $a \in C_0^\infty(U)$  existiert, welche  $\text{supp}(a) \subseteq \varphi^{-1}(\mathbb{B})$  erfüllt, so dass:*

$$h(x) = \begin{cases} a^4(x) |\varphi dx^1|_x^2 & \text{für } x \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. Dann existiert zu jedem  $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  eine freie Einbettung  $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$ , so dass:

$$\begin{aligned} F^*(g^{can}) &= F_0^*(g^{can}) + h \\ \text{supp}(F - F_0) &\subseteq U \\ \max_{x \in M} |F(x) - F_0(x)|_{\mathbb{R}^q} &\leq C \cdot \epsilon \end{aligned}$$

gilt, wobei die Konstante  $C \in \mathbb{R}_{>0}$  nicht von  $\epsilon$  abhängt.

## 3.2 Hilfsresultate

Ziel dieses Abschnittes ist es, das in Satz 3.1 verwendete, Lemma 3.4 zu beweisen. Zunächst werden Begriffe aus der Konvexgeometrie eingeführt:

**Definition 3.1** Für eine Teilmenge  $X \subseteq \mathbb{R}^q$  wird die Menge:

$$(i) \quad \text{ccone}(X) := \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i : m \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_m \in X, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}$$

als **konvex-konische Hülle von  $X$**  bezeichnet.

(ii)

$$\text{conv}(X) := \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i : m \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_m \in X, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ mit } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}$$

als **konvexe Hülle von  $X$**  bezeichnet.

Die Inklusion  $\text{conv}(X) \subseteq \text{ccone}(X)$  ist offensichtlich.

**Lemma 3.1** Gegeben seien linear unabhängige Vektoren  $v_1, \dots, v_q \in \mathbb{R}^q$ , dann gilt:

$$z \in \text{int}(\text{ccone}\{v_1, \dots, v_q\}) \iff z = \sum_{i=1}^q \lambda_i v_i \quad \text{mit } \lambda_i \in \mathbb{R}_{>0} \quad \forall i \in \{1, \dots, q\}$$

*Beweis.* Es sei  $V \in \mathbb{R}^{q \times q}$  die Matrix, deren Spaltenvektoren  $v_1, \dots, v_q$  sind. Wird  $V$  als Abbildung  $\mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$  aufgefasst, so ist diese Abbildung, aufgrund der Linearität, stetig.



Das gilt auch für die inverse Abbildung  $V^{-1} : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ . Die Abbildung  $V$  ist also ein Homöomorphismus auf  $\mathbb{R}^q$ . Für beliebige  $z \in \mathbb{R}^q$  gilt die folgende Aussage:

$$z \in \text{ccone}\{v_1, \dots, v_q\} \Leftrightarrow V^{-1}z \in \mathbb{R}_{\geq 0}^q$$

oder auch:

$$\text{ccone}\{v_1, \dots, v_q\} = V(\mathbb{R}_{\geq 0}^q)$$

Da  $\partial\mathbb{R}_{\geq 0}^q = \{z \in \mathbb{R}_{\geq 0}^q : \exists i \in \{1, \dots, q\} : z_i = 0\}$ , folgt mit:

$$\text{int}(\mathbb{R}_{\geq 0}^q) = \overline{\mathbb{R}_{\geq 0}^q} \setminus \partial\mathbb{R}_{\geq 0}^q = \mathbb{R}_{\geq 0}^q \setminus \partial\mathbb{R}_{\geq 0}^q$$

aus der Homöomorphie von  $V$ , die Behauptung. □

**Lemma 3.2** *Es sei  $z \in \mathbb{R}^q \setminus \{0\}$ , und  $W$  eine Umgebung von  $z$ . Dann existiert eine linear unabhängige Teilmenge  $\{v_1, \dots, v_q\} \subseteq W$ , so dass  $z \in \text{int}(\text{ccone}\{v_1, \dots, v_q\})$ .*

*Beweis.* Mit [Lee03, Example 9.1 (e)] und der Homöomorphie-Eigenschaft von Drehungen und Streckungen, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass:

$$z = \sum_{i=1}^q e_i \tag{3.5}$$

gilt. Hierbei sind  $e_1, \dots, e_q$  die kanonischen Einheitsvektoren in  $\mathbb{R}^q$ . Unter Verwendung der Offenheit von  $W$ , existiert ein  $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass  $B_\epsilon(z) \subseteq W$  gilt. Dann gilt für alle  $i \in \{1, \dots, q\}$ :

$$v_i := z + \frac{\epsilon}{2}e_i \in B_\epsilon(z) \tag{3.6}$$

Nun wird gezeigt, dass die Vektoren  $v_1, \dots, v_q$  linear unabhängig sind. Angenommen, es existieren Koeffizienten  $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{R}$ , so dass:

$$0 = \sum_{i=1}^q \lambda_i v_i$$

gilt. Dann ist

$$0 = \sum_{i=1}^q \lambda_i v_i \stackrel{(3.6)}{=} \sum_{i=1}^q \lambda_i \left( z + \frac{\epsilon}{2}e_i \right) = \sum_{i=1}^q \lambda_i z + \frac{\epsilon}{2} \sum_{i=1}^q \lambda_i e_i \tag{3.7}$$

Ist nun  $\sum_{i=1}^q \lambda_i = 0$  gilt. Dann ist

$$0 = \frac{\epsilon}{2} \sum_{i=1}^q \lambda_i e_i$$

und es folgt  $\lambda_i = 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, q\}$ . Ist  $\sum_{i=1}^q \lambda_i \neq 0$  dann kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass  $\sum_{i=1}^q \lambda_i = 1$  gilt. In dem Fall folgt aus (3.7)

$$\sum_{i=1}^q e_i \stackrel{(3.5)}{=} z = -\frac{\epsilon}{2} \sum_{i=1}^q \lambda_i e_i$$

und es gilt  $\lambda_i = -\frac{2}{\epsilon}$  für alle  $i \in \{1, \dots, q\}$ . Dann ist

$$\sum_{i=1}^q \lambda_i = -q \cdot \frac{2}{\epsilon} \neq 1$$

womit die lineare Unabhängigkeit der Vektoren  $v_1, \dots, v_q$  bewiesen ist. Nun wird noch gezeigt, dass auch die Bedingung  $z \in \text{int}(c\text{cone}\{v_1, \dots, v_q\})$  erfüllt ist. Es ist:

$$\sum_{i=1}^q v_i \stackrel{(3.6)}{=} \sum_{i=1}^q \left( z + \frac{\epsilon}{2} e_i \right) = \sum_{i=1}^q z + \frac{\epsilon}{2} \sum_{i=1}^q e_i \stackrel{(3.5)}{=} qz + \frac{\epsilon}{2} z = \left( q + \frac{\epsilon}{2} \right) z$$

beziehungsweise:

$$z = \sum_{i=1}^q \frac{1}{q + \frac{\epsilon}{2}} \cdot v_i$$

Daraus folgt mit Lemma 3.1 die Behauptung. □

**Lemma 3.3** *Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge mit  $0 \in U$ , und es seien  $v_1, \dots, v_q \in C(U, \mathbb{R}^q)$  gegeben, so dass die Vektoren  $v_1(0), \dots, v_q(0) \in \mathbb{R}^q$  linear unabhängig sind. Ferner sei  $z \in \text{int}(c\text{cone}(v_1(0), \dots, v_q(0)))$ . Dann existieren  $\delta, \rho \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass für jedes  $x \in B_\rho(0)$  die Inklusion:*

$$B_\delta(z) \subseteq \text{int}(c\text{cone}(v_1(x), \dots, v_q(x)))$$

*gilt.*

*Beweis.* Definiere eine Abbildung:

$$V : U \longrightarrow \mathbb{R}^{q \times q}$$

$$x \mapsto V(x) = [v_1(x), \dots, v_q(x)]$$

Hierbei wird der Raum  $\mathbb{R}^{q \times q}$  mit der, von der **euklidischen Norm induzierten Matrixnorm**:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\mathbb{R}^{q \times q}} : \mathbb{R}^{q \times q} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \sup_{x \in \mathbb{S}^{q-1}} |Ax|_{\mathbb{R}^q} \end{aligned}$$

versehen. Nach Voraussetzung hat die Matrix  $V(0)$  den Rang  $q$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $V$ , und der Stetigkeit der Determinantenfunktion, kann angenommen werden, dass für alle  $x \in U$  die Bedingung  $V(x) \in GL(q, \mathbb{R})$  gilt. Ist dies nicht der Fall, so wird  $U$  verkleinert. Demzufolge ist auch die Abbildung:

$$\begin{aligned} V^{-1} : U &\longrightarrow GL(q, \mathbb{R}) \\ x &\mapsto V^{-1}(x) \end{aligned}$$

wohldefiniert, und mit der Cramerschen Regel [Fis08, 3.3.5.] auch stetig. Nach Voraussetzung gilt  $V^{-1}(0)z \in \mathbb{R}_{>0}^q$ . Dies motiviert die Definition der folgenden Abbildung, hierbei sei  $R_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass  $\overline{B}_{R_1}(0) \subseteq U$  und  $R_2 \in \mathbb{R}_{>0}$  eine beliebige feste Zahl:

$$\begin{aligned} \Psi : B_{R_1}(0) \times B_{R_2}(z) &\longrightarrow \mathbb{R}^q \\ (x, b) &\mapsto V^{-1}(x)b \end{aligned}$$

Sei nun  $x \in B_{R_1}(0)$  und  $b \in B_{R_2}(z)$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} |\Psi(x, b) - \Psi(0, z)|_{\mathbb{R}^q} &= |V^{-1}(x)b - V^{-1}(0)z|_{\mathbb{R}^q} \\ &\leq |[V^{-1}(x) - V^{-1}(0)]b|_{\mathbb{R}^q} + |V^{-1}(0)[b - z]|_{\mathbb{R}^q} \\ &\leq \|V^{-1}(x) - V^{-1}(0)\|_{\mathbb{R}^{q \times q}} |b|_{\mathbb{R}^q} + \|V^{-1}(0)\|_{\mathbb{R}^{q \times q}} |b - z|_{\mathbb{R}^q} \\ &\leq C_1(z, R_2) \cdot \|V^{-1}(x) - V^{-1}(0)\|_{\mathbb{R}^{q \times q}} + C_2(V(0)) \cdot |b - z|_{\mathbb{R}^q} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Wähle nun ein  $\epsilon > 0$ , so dass  $B_\epsilon(V^{-1}(0)z) \subseteq \mathbb{R}_{>0}^q$  gilt. Aufgrund der Stetigkeit der Abbildung  $V^{-1}$ , existiert ein  $\rho(\epsilon) \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass für  $|x|_{\mathbb{R}^n} < \rho$  die Abschätzung:

$$\|V^{-1}(x) - V^{-1}(0)\|_{\mathbb{R}^{q \times q}} < \frac{\epsilon}{2C_1}$$

gilt. Sei nun  $|b - z|_{\mathbb{R}^q} < \delta := \frac{\epsilon}{2C_2}$ , dann gilt, zusammen mit (3.8), die Abschätzung

$|\Psi(x, b) - \Psi(0, z)|_{\mathbb{R}^q} < \epsilon$ , das heißt  $\Psi(x, b) \in B_\epsilon(V^{-1}(0)z) \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ . Mit Lemma 3.1 folgt, aus der Wahl der Abbildung  $\Psi$ , die Behauptung.  $\square$

Zusammenfassend ergibt sich, aus Lemma 3.1 bis Lemma 3.3, das in [Gün89b, Lemma 2.3.] aufgeführte Resultat:

**Lemma 3.4** *Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge mit  $0 \in U$ , eine Funktion  $g \in C^\infty(U, \mathbb{R}^q)$  mit  $g(0) \neq 0$ , eine offene Menge  $W \subseteq \mathbb{R}^q$  mit  $g(0) \in W$ , sowie eine Menge von Funktionen  $F \subseteq C^\infty(U, \mathbb{R}^q)$  mit folgender Eigenschaft gegeben: Für jedes  $z \in W$  existiert eine Menge von Koeffizienten  $\{\alpha_1^z, \dots, \alpha_k^z\} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$  und eine Teilmenge von Funktionen  $\{f_1^z, \dots, f_k^z\} \subseteq F$ , so dass:*

$$z = \sum_{i=1}^k \alpha_i^z f_i^z(0)$$

*Dann existiert ein  $\rho > 0$ , ein  $l(k, q) \in \mathbb{N}$ , eine Menge von Koeffizientenfunktionen  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subseteq C^\infty(B_\rho(0), \mathbb{R}_{>0})$ , sowie eine Menge von Funktionen  $\{f_1, \dots, f_l\} \subseteq F$ , so dass:*

$$g(x) = \sum_{i=1}^l \alpha_i(x) f_i(x)$$

*für alle  $x \in B_\rho(0)$  gilt.*

*Beweis.* Mit Lemma 3.2 existieren linear unabhängige Vektoren  $\{v_1, \dots, v_q\} \subseteq W$ , so dass  $g(0) \in \text{int}(\text{ccone}\{v_1, \dots, v_q\})$ . Schreibe, gemäß der Voraussetzung, für alle  $j \in \{1, \dots, q\}$ :

$$v_j = \sum_{i=1}^k \beta_i^{v_j} f_i^{v_j}(0)$$

wobei die Koeffizienten  $\beta_1^{v_j}, \dots, \beta_k^{v_j}$  positiv sind, und die Abbildungen  $f_1^{v_j}, \dots, f_k^{v_j}$  in der Menge  $F$  liegen. Daraus hervorgehend, wird für jedes  $j \in \{1, \dots, q\}$  die Abbildung  $v_j \in C^\infty(U, \mathbb{R}^q)$ , mit der Bildungsvorschrift:

$$v_j(x) := \sum_{i=1}^k \beta_i^{v_j} f_i^{v_j}(x) \quad \text{für } x \in U \quad (3.9)$$

definiert. Mit Lemma 3.3 existieren  $\delta, \rho \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass:

$$B_\delta(g(0)) \subseteq \text{int}(\text{ccone}(v_1(x), \dots, v_q(x)))$$

für alle  $x \in B_\rho(0)$  gilt. Definiere nun:

$$\begin{aligned} V : B_\rho(0) &\longrightarrow GL(q, \mathbb{R}) \\ x &\mapsto [v_1(x), \dots, v_q(x)] \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von  $g$ , kann angenommen werden, dass  $g(B_\rho(0)) \subseteq B_\delta(g(0))$  gilt. Dann ist  $V(x)^{-1}(g(x)) \in \mathbb{R}_{>0}^q$  für alle  $x \in B_\rho(0)$ . Definiere, daraus resultierend, eine glatte Abbildung:

$$\begin{aligned} \gamma : B_\rho(0) &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0}^q \\ x &\mapsto V(x)^{-1}(g(x)) \end{aligned}$$

und es gilt für jedes  $x \in B_\rho(0)$ :

$$g(x) = V(x) \cdot V(x)^{-1}(g(x)) = \sum_{j=1}^q \gamma_j(x) v_j(x) \stackrel{(3.9)}{=} \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^k \underbrace{\gamma_j(x) \beta_i^{v_j}}_{>0} f_i^{v_j}(x)$$

woraus die Behauptung folgt. □

## 4 Reduktion auf ein Perturbationsproblem

In diesem Kapitel wird die lokale Problemstellung aus Satz 3.2 in ein Perturbationsproblem überführt, welches sich mit der Methode, die in Kapitel 5 diskutiert werden wird, lösen lässt. Dazu wird der folgende Satz, welcher der Arbeit [Gün89b, Kapitel 4], beziehungsweise [HH06, Theorem 1.3.9.] entnommen ist, gezeigt:

**Satz 4.1** *Gegeben sei eine freie Abbildung  $F_0 \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , für  $q \geq \frac{n}{2}(n+3)+5$ , und eine Abbildung  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$ . Dann existiert eine kompakte Menge  $K \subseteq \mathbb{B}$ , mit  $\text{supp}(a) \subseteq K$ , so dass die folgende Aussage gilt: Für jedes  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  existiert ein  $\epsilon_k \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass für jedes  $\epsilon \in (0, \epsilon_k]$  eine freie Abbildung  $F_{\epsilon,k} \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  existiert, welche die Eigenschaften:*

$$\begin{aligned} \partial_1 F_{\epsilon,k} \cdot \partial_1 F_{\epsilon,k} &= \partial_1 F_0 \cdot \partial_1 F_0 + a^4 + \epsilon^{k+1} f_{11}^{\epsilon,k} \\ \partial_1 F_{\epsilon,k} \cdot \partial_i F_{\epsilon,k} &= \partial_1 F_0 \cdot \partial_i F_0 + \epsilon^{k+1} f_{1i}^{\epsilon,k} \quad \text{für } 2 \leq i \leq n \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \partial_i F_{\epsilon,k} \cdot \partial_j F_{\epsilon,k} &= \partial_i F_0 \cdot \partial_j F_0 + \epsilon^{k+1} f_{ij}^{\epsilon,k} \quad \text{für } 2 \leq i \leq j \leq n \\ \text{supp}(F_{\epsilon,k} - F_0) &\in C_0^\infty(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\max_{x \in \mathbb{B}} |F_{\epsilon,k}(x) - F_0(x)|_{\mathbb{R}^q} \leq C(n, k, F_0, a) \cdot \epsilon \quad (4.3)$$

erfüllt. Hierbei ist  $f^{\epsilon,k} := (f_{ij}^{\epsilon,k})_{1 \leq i \leq j \leq n} \in C_0^\infty(\mathbb{B}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$  mit  $\text{supp}(f^{\epsilon,k}) \subseteq K$ . Diese Abbildung erfüllt die Abschätzung:

$$\|f^{\epsilon,k}\|_{C^3(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \leq C(n, k, F_0, a) \cdot \epsilon^{-3} \quad (4.4)$$

Um Satz 4.1 zu beweisen, wird eine Vielzahl von technischen Überlegungen benötigt, die im Abschnitt 4.1 zusammengetragen und bewiesen werden, bevor die Abbildungen  $F_{\epsilon,k}$  in Abschnitt 4.2 induktiv hergeleitet werden.

## 4.1 Hilfsresultate

Gegeben sei eine Menge von Funktionen  $\{e_1, \dots, e_{n+5}\} \subseteq C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , für  $q \geq n+5$ , so dass für jedes beliebige  $x \in \overline{\mathbb{B}}$  die Vektoren  $e_1(x), \dots, e_{n+5}(x)$  linear unabhängig sind. Mit [Fis08, 5.4.9] existiert für jedes  $z \in \mathbb{R}^q$  eine eindeutig bestimmte Orthogonalzerlegung, das heißt, es existiert ein  $z^\top \in \text{lin}\{e_1(x), \dots, e_{n+5}(x)\}$  und ein  $z^\perp \in \text{lin}\{e_1(x), \dots, e_{n+5}(x)\}^\perp$ , so dass  $z = z^\top + z^\perp$ . Mit:

$$P_x : \mathbb{R}^q \longrightarrow \text{lin}\{e_1(x), \dots, e_{n+5}(x)\}$$

wird die Orthogonalprojektion auf den Unterraum  $\text{lin}\{e_1(x), \dots, e_{n+5}(x)\}$  bezeichnet, das heißt  $P_x(z) = z^\top$ . Das folgende Lemma entspricht [HH06, Lemma 1.3.12], und stellt die Grundlage des gesamten Kapitels dar.

**Lemma 4.1** *Es sei  $\{e_1, \dots, e_{n+5}\} \subseteq C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , für  $q \geq n+5$ , eine Menge von punktweise linear unabhängigen Funktionen, dann existieren Abbildungen  $u, v \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , mit der Eigenschaft:*

$$u(x), v(x) \in \text{lin}\{e_1(x), \dots, e_{n+5}(x)\} \quad \text{für alle } x \in \overline{\mathbb{B}}$$

so dass für alle  $x \in \overline{\mathbb{B}}$  die  $(n+2)$  Vektoren:

$$u(x), v(x), e_i(x) + sP_x(a \partial_i u(x) + b \partial_i v(x)) \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (4.5)$$

für beliebige  $s \in \mathbb{R}$ , und  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a^2 + b^2 = 1$ , linear unabhängig sind.

*Beweis.* Es sei  $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$  die Immersion aus Lemma C.1. Für  $\epsilon \in (0, 1]$  werden Abbildungen  $u, v \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} u(x) &:= \sum_{l=1}^{n+1} \epsilon F_l(\epsilon^{-2}x) e_{l+1}(x) + e_{n+4}(x) \\ v(x) &:= \sum_{l=1}^{n+1} \epsilon F_l(\epsilon^{-2}x) e_{l+2}(x) + e_{n+5}(x) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Die Behauptung wird bewiesen, indem gezeigt wird, dass es ein  $\epsilon \in (0, 1]$  gibt, so dass die Abbildungen  $u$  und  $v$  die geforderten Eigenschaften (4.5) erfüllen. Zunächst wird

bemerkt, dass für jedes  $x \in \overline{\mathbb{B}}$ , und  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a^2 + b^2 = 1$ , die glatten Abbildungen:

$$w_l(x) := \begin{cases} a e_{l+1}(x) + b e_{l+2}(x) & \text{für } l \in \{1, \dots, n+1\} \\ e_{l+2}(x) & \text{für } l \in \{n+2, \dots, n+3\} \end{cases} \quad (4.7)$$

punktweise linear unabhängig sind. Seien dazu  $x \in \overline{\mathbb{B}}$  und  $c_1, \dots, c_{n+3} \in \mathbb{R}$ , so dass:

$$\sum_{l=1}^{n+3} c_l w_l(x) = 0$$

dann muss, wegen der punktweisen linearen Unabhängigkeit der Funktionen  $e_1, \dots, e_{n+5}$ , bereits  $c_{n+2} = 0 = c_{n+3}$  gelten. Das bedeutet:

$$c_1 a e_2(x) + (c_1 b + c_2 a) e_3(x) + \dots + (c_n b + c_{n+1} a) e_{n+2}(x) + c_{n+1} b e_{n+3}(x) = 0$$

beziehungsweise:

$$c_1 a = 0, \quad c_1 b + c_2 a = 0, \quad \dots, \quad c_n b + c_{n+1} a = 0, \quad c_{n+1} b = 0$$

Da nach Voraussetzung  $a^2 + b^2 = 1$  gilt, folgt  $c_l = 0$  für alle  $l \in \{1, \dots, n+1\}$ , womit die punktweise lineare Unabhängigkeit der Funktionen in (4.7) gezeigt ist. Definiere nun Abbildungen  $\widehat{w}_1, \dots, \widehat{w}_{n+2} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  wie folgt:

$$\widehat{w}_i(y, x) := \begin{cases} \sum_{l=1}^{n+1} \partial_i F_l(y) w_l(x) & \text{für } i \in \{1, \dots, n\} \\ w_{i+1}(x) & \text{für } i \in \{n+1, n+2\} \end{cases} \quad (4.8)$$

Es wird gezeigt, dass die Abbildungen  $\widehat{w}_1, \dots, \widehat{w}_{n+2}$  punktweise linear unabhängig sind. Für  $y \in \mathbb{R}^n$  und ein  $x \in \overline{\mathbb{B}}$  seien  $\mu_1, \dots, \mu_{n+2}$ , so dass:

$$\sum_{i=1}^n \mu_i \sum_{l=1}^{n+1} \partial_i F_l(y) w_l(x) + \sum_{j=1}^2 \mu_{n+j} w_{n+j+1}(x) = 0$$

gilt, dann folgt, aus der linearen Unabhängigkeit der Vektoren  $w_1(x), \dots, w_{n+3}(x)$ , bereits  $\mu_{n+1} = 0 = \mu_{n+2}$ . Dies impliziert:

$$\sum_{i=1}^n \mu_i \partial_i F_l(y) = 0 \quad \text{für alle } l \in \{1, \dots, n+1\}$$



beziehungsweise:

$$\sum_{i=1}^n \mu_i \partial_i F(y) = 0$$

Da  $F$  eine Immersion ist, folgt  $\mu_i = 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Es sei nun  $\widehat{W} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{n+2 \times q})$  die matrixwertige Funktion, deren Zeilen die Funktionen  $\widehat{w}_1^T, \dots, \widehat{w}_{n+2}^T$  sind. Dann existiert, aufgrund der Kompaktheit der Menge  $\overline{\mathbb{B}}$ , und der Periodizität der Abbildung  $F$ , ein  $\theta \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass:

$$\det(\widehat{W}(y, x) \cdot \widehat{W}^T(y, x)) \geq \theta \quad (4.9)$$

für alle  $y \in \mathbb{R}^n$  und  $x \in \overline{\mathbb{B}}$  gilt. Im Folgenden seien  $\epsilon \in (0, 1]$  und  $a, b \in \mathbb{R}$ , mit  $a^2 + b^2 = 1$ , sowie  $s \in \mathbb{R}$ , dann werden Funktionen  $v_1, \dots, v_{n+2} \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  wie folgt definiert:

$$v_i(x) := \begin{cases} e_i(x) + sP_x(a \partial_i u(x) + b \partial_i v(x)) & \text{für } i \in \{1, \dots, n\} \\ u(x) & \text{für } i = n+1 \\ v(x) & \text{für } i = n+2 \end{cases} \quad (4.10)$$

Dann ist für  $i \in \{1, \dots, n\}$ :

$$\begin{aligned} v_i(x) &= e_i(x) + sP_x(a \partial_i u(x) + b \partial_i v(x)) \\ &\stackrel{(4.6)}{=} e_i(x) + sP_x \left( \sum_{l=1}^{n+1} \frac{1}{\epsilon} \partial_i F_l(\epsilon^{-2}x) (a e_{l+1}(x) + b e_{l+2}(x)) \right) \\ &\quad + sP_x \left[ \sum_{l=1}^{n+1} \epsilon F_l(\epsilon^{-2}x) (a \partial_i e_{l+1}(x) + b \partial_i e_{l+2}(x)) \right] \\ &\quad + sP_x [\partial_i e_{n+4}(x) + \partial_i e_{n+5}(x)] \\ &= e_i(x) + \frac{s}{\epsilon} \sum_{l=1}^{n+1} \partial_i F_l(x)(\epsilon^{-2}x) (a e_{l+1}(x) + b e_{l+2}(x)) + s\mathcal{O}(1) \\ &\stackrel{(4.8)}{=} e_i(x) + \frac{s}{\epsilon} \widehat{w}(\epsilon^{-2}x, x) + s\mathcal{O}(1) \end{aligned} \quad (4.11)$$

ferner ist mit (4.6):

$$v_{n+1} = u(x) = e_{n+4}(x) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad \text{und} \quad v_{n+2} = v(x) = e_{n+5}(x) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (4.12)$$

Zunächst wird angenommen, dass  $|s| \geq \epsilon^{1-\frac{1}{2n}}$  gilt. Dann folgt aus (4.11), für  $i \in$

$\{1, \dots, n\}$ :

$$v_i(x) = \frac{s}{\epsilon} [\epsilon e_i(x) + \widehat{w}(\epsilon^{-2}x, x) + \mathcal{O}(\epsilon)] = \frac{s}{\epsilon} [\widehat{w}_i(\epsilon^{-2}x, x) + \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{2n}})] \quad (4.13)$$

und aus (4.12):

$$v_{n+1} = e_{n+4}(x) + \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{2n}}) \quad \text{und} \quad v_{n+2} = e_{n+5}(x) + \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{2n}}) \quad (4.14)$$

Nun sei  $V \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{n+2 \times q})$  die matrixwertige Funktion, deren Zeilen die Funktionen  $v_1^T, \dots, v_{n+2}^T$  sind. Aus (4.13) und (4.14) folgt, unter Beachtung von  $|s| \geq \epsilon^{1-\frac{1}{2n}}$ , für alle  $x \in \mathbb{B}$ :

$$\begin{aligned} \det(V(x) \cdot V^T(x)) &= \frac{s^{2n}}{\epsilon^{2n}} \left[ \det(\widehat{W}(\epsilon^{-2}x, x) \cdot \widehat{W}^T(\epsilon^{-2}x, x)) + \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{2n}}) \right] \stackrel{(4.9)}{\geq} \frac{s^{2n}}{\epsilon^{2n}} \left( \theta - C\epsilon^{\frac{1}{2n}} \right) \\ &\geq \frac{1}{\epsilon} \left( \theta - C\epsilon^{\frac{1}{2n}} \right) \geq \frac{\theta}{2\epsilon} \end{aligned}$$

falls  $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ , für ein hinreichend kleines  $\epsilon_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ . Damit ist gezeigt, dass die in (4.10) definierten Funktionen, für  $|s| \geq \epsilon^{1-\frac{1}{2n}}$  und alle  $x \in \overline{\mathbb{B}}$  punktweise linear unabhängig sind, sofern  $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  klein genug ist. Nun sei  $|s| < \epsilon^{1-\frac{1}{2n}}$ , und für ein  $x \in \overline{\mathbb{B}}$ , seien  $c_1, \dots, c_{n+2} \in \mathbb{R}$ , so dass  $\sum_{i=1}^{n+2} c_i v_i(x) = 0$  gilt. Setze:

$$A := \max_{1 \leq i \leq n+2} |c_i| \quad (4.15)$$

Es wird gezeigt, dass  $A = 0$  für hinreichend kleine  $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  gelten muss. Aus (4.11) folgt für  $i \in \{1, \dots, n\}$ :

$$\begin{aligned} v_i(x) &= e_i(x) + \frac{s}{\epsilon} \widehat{w}_i(\epsilon^{-2}x, x) + \mathcal{O}(\epsilon^{1-\frac{1}{2n}}) \\ &\stackrel{(4.6)}{=} e_i(x) + \frac{s}{\epsilon} \sum_{l=1}^{n+1} \partial_i F_l(x)(\epsilon^{-2}x)(a e_{l+1}(x) + b e_{l+2}(x)) + \mathcal{O}(\epsilon^{1-\frac{1}{2n}}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

und aus (4.12):

$$v_{n+1} = e_{n+4}(x) + \mathcal{O}(\epsilon^{1-\frac{1}{2n}}) \quad \text{und} \quad v_{n+2} = e_{n+5}(x) + \mathcal{O}(\epsilon^{1-\frac{1}{2n}}) \quad (4.17)$$

Mit (4.16) und (4.17) folgt aus  $\sum_{i=1}^{n+2} c_i v_i(x) = 0$ :

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^n c_i \left[ e_i(x) + \frac{s}{\epsilon} \sum_{l=1}^{n+1} \partial_i F_l(\epsilon^{-2}x) (a e_{l+1}(x) + b e_{l+2}(x)) + \mathcal{O}(\epsilon^{1-\frac{1}{2n}}) \right] \\
&\quad + c_{n+1} \left[ e_{n+4}(x) + \mathcal{O}(\epsilon^{1-\frac{1}{2n}}) \right] + c_{n+2} \left[ e_{n+5}(x) + \mathcal{O}(\epsilon^{1-\frac{1}{2n}}) \right] \\
&\stackrel{(C.1), (4.15)}{=} \sum_{i=1}^n c_i e_i(x) + \frac{s}{\epsilon} \sum_{l=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{\min(l,n)} c_i [\partial_i F_l(\epsilon^{-2}x) (a e_{l+1}(x) + b e_{l+2}(x))] \\
&\quad + c_{n+1} e_{n+4}(x) + c_{n+2} e_{n+5}(x) + \mathcal{O}(A\epsilon^{1-\frac{1}{2n}}) \\
&= \sum_{i=1}^n c_i e_i(x) + \frac{s}{\epsilon} \sum_{l=2}^{n+2} \sum_{i=1}^{\min(l-1,n)} c_i \partial_i F_{l-1}(\epsilon^{-2}x) a e_l(x) \\
&\quad + \frac{s}{\epsilon} \sum_{l=3}^{n+3} \sum_{i=1}^{\min(l-2,n)} c_i \partial_i F_{l-2}(\epsilon^{-2}x) b e_l(x) \\
&\quad + c_{n+1} e_{n+4}(x) + c_{n+2} e_{n+5}(x) + \mathcal{O}(A\epsilon^{1-\frac{1}{2n}}) \\
&= \sum_{i=1}^n c_i e_i(x) + \frac{s}{\epsilon} \sum_{i=2}^{n+2} \sum_{l=1}^{\min(i-1,n)} c_l \partial_l F_{i-1}(\epsilon^{-2}x) a e_i(x) \\
&\quad + \frac{s}{\epsilon} \sum_{i=3}^{n+3} \sum_{l=1}^{\min(i-1,n)} c_l \partial_l F_{i-2}(\epsilon^{-2}x) b e_i(x) \\
&\quad + c_{n+1} e_{n+4}(x) + c_{n+2} e_{n+5}(x) + \mathcal{O}(A\epsilon^{1-\frac{1}{2n}})
\end{aligned}$$

Aus der punktweisen linearen Unabhängigkeit der Abbildungen  $e_1, \dots, e_{n+5}$  folgt:

$$\begin{aligned}
c_1 + \mathcal{O}(A\epsilon^{1-\frac{1}{2n}}) &= 0 \\
c_2 + \frac{s}{\epsilon} c_1 a \partial_1 F_1(\epsilon^{-2}x) + \mathcal{O}(A\epsilon^{1-\frac{1}{2n}}) &= 0
\end{aligned} \tag{4.18}$$

sowie für  $i \in \{3, \dots, n\}$ :

$$c_i + \frac{s}{\epsilon} \sum_{l=1}^{i-1} c_l [a \partial_l F_{i-1}(\epsilon^{-2}x) + b \partial_l F_{i-2}(\epsilon^{-2}x)] = 0 \tag{4.19}$$

und:

$$\begin{aligned}
c_{n+1} + \mathcal{O}(A\epsilon^{1-\frac{1}{2n}}) &= 0 \\
c_{n+2} + \mathcal{O}(A\epsilon^{1-\frac{1}{2n}}) &= 0
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Aus (4.18) folgt:

$$\begin{aligned} |c_1| &\leq C A \epsilon^{1-\frac{1}{2n}} \\ |c_2| &\leq C A \epsilon^{1-\frac{2}{2n}} \end{aligned}$$

woraus, mit (4.19), induktiv für  $i \in \{3, \dots, n\}$  die Abschätzung:

$$|c_i| \leq C A \epsilon^{1-\frac{i}{2n}}$$

hervorgeht. Ferner impliziert (4.20):

$$|c_{n+1}| + |c_{n+2}| \leq C A \epsilon^{1-\frac{1}{2n}}$$

für eine bestimmte, von  $x$  unabhängige Konstante,  $C \in \mathbb{R}_{>0}$ . Daraus folgt insgesamt  $|c_i| \leq C A \sqrt{\epsilon}$  für alle  $i \in \{1, \dots, n+2\}$ , und schließlich, unter Beachtung von (4.15):

$$A = \max_{1 \leq i \leq n+2} |c_i| \leq C A \sqrt{\epsilon} \leq \frac{1}{2} A$$

falls  $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ , mit  $C \sqrt{\epsilon_0} \leq \frac{1}{2}$ . Daraus folgt die punktweise lineare Unabhängigkeit der Funktionen  $v_1, \dots, v_{n+2}$ , für  $|s| < \epsilon^{1-\frac{1}{2n}}$ , und hinreichend kleine  $\epsilon > 0$ . Aus der Definition der Funktionen  $v_1, \dots, v_{n+2}$  in (4.10) folgt die Behauptung. □

**Bemerkung 4.1** *Es kann angenommen werden, dass die in Lemma 4.1 konstruierten Funktionen  $u$  und  $v$  punktweise orthonormal zueinander sind.*

*Beweis.* Es wird gezeigt, dass eine Orthonormalisierung der Funktionen  $u$  und  $v$ , aus Lemma 4.1, die lineare Unabhängigkeit der Vektoren in (4.5), für beliebige  $x \in \overline{\mathbb{B}}$ , nicht beeinträchtigt. Dazu werden punktweise orthonormalisierte Funktionen  $\hat{u}, \hat{v} \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}})$ , gemäß [Fis08, 5.4.9], wie folgt definiert: Für  $x \in \mathbb{B}$  ist, unter Beachtung der punktweisen linearen Unabhängigkeit der Funktionen  $u$  und  $v$ :

$$\begin{aligned} \hat{u}(x) &:= \frac{u(x)}{|u(x)|} = C_1(u(x)) \cdot u(x) \\ \hat{v}(x) &:= \frac{v(x) - \left( \frac{u(x)}{|u(x)|} \cdot v(x) \right) \frac{u(x)}{|u(x)|}}{\left| v(x) - \left( \frac{u(x)}{|u(x)|} \cdot v(x) \right) \frac{u(x)}{|u(x)|} \right|} = C_2(u(x), v(x)) \cdot u(x) + C_3(u(x), v(x)) \cdot v(x) \end{aligned}$$

Dann gilt für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $x \in \overline{\mathbb{B}}$ ,  $s \in \mathbb{R}$  und  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a^2 + b^2 = 1$ :

$$\begin{aligned}
& e_i(x) + sP_x(a \partial_i \widehat{u}(x) + b \partial_i \widehat{v}(x)) \\
&= e_i(x) + sP_x[a C_1(u(x)) \cdot \partial_i u(x) + b C_2(u(x), v(x)) \cdot \partial_i u(x) + b C_3(u(x), v(x)) \cdot \partial_i v(x)] \\
&\quad + sP_x[a C_4(u(x), i) \cdot u(x) + b C_5(u(x), v(x), i) \cdot u(x) + b C_6(u(x), v(x), i) \cdot v(x)] \\
&= e_i(x) + sP_x[C_7(u(x), v(x), a, b) \cdot \partial_i u(x) + C_8(u(x), v(x), b) \cdot \partial_i v(x)] \\
&\quad + C_9(u(x), v(x), i, s, a, b) \cdot u(x) + C_{10}(u(x), v(x), i, s, b) \cdot v(x) \\
&= e_i(x) \\
&\quad + C_{11}(u(x), v(x), a, b) \cdot P_x[C_{12}(u(x), v(x), a, b) \cdot \partial_i u(x) + C_{13}(u(x), v(x), a, b) \cdot \partial_i v(x)] \\
&\quad + C_9(u(x), v(x), i, s, a, b) u(x) + C_{10}(u(x), v(x), i, s, b) v(x)
\end{aligned}$$

mit  $C_{12}^2(u(x), v(x), a, b) + C_{13}^2(u(x), v(x), a, b) = 1$ . Mit linearen Unabhängigkeit der Vektoren in (4.5) folgt die Behauptung.  $\square$

Für weitere Konstruktionen ist das folgende Hilfsresultat wichtig:

**Lemma 4.2** *Gegeben seien punktweise linear unabhängige Abbildungen  $e_1, \dots, e_k \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , wobei  $q \geq k + 1$  gilt. Dann existieren Abbildungen  $e_{k+1}, \dots, e_q \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , so dass die Abbildungen  $e_1, \dots, e_q$  in  $\overline{\mathbb{B}}$  punktweise linear unabhängig sind.*

*Beweis.* Nach dem Fortsetzungssatz von Seeley [See64] existiert ein  $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass Abbildungen  $\widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_k \in C^\infty(B_{1+\epsilon}(0), \mathbb{R}^q)$  mit der Eigenschaft existieren, dass  $\widehat{e}_i|_{\overline{\mathbb{B}}} \equiv e_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, k\}$  gilt. Wegen der Stetigkeit der Determinante, kann angenommen werden, dass  $\widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_k$  auf  $B_{1+\epsilon}(0)$  punktweise linear unabhängig sind. Die Menge:

$$N := \coprod_{x \in B_{1+\epsilon}(0)} \text{lin}\{\widehat{e}_1(x), \dots, \widehat{e}_k(x)\}^\perp$$

kann, mit [Lee03, Lemma 8.41], als glattes Vektorbündel über  $B_{1+\epsilon}(0)$  aufgefasst werden. Mit [Hir94, Chapter 4, 2.5. Corollary] ist das Vektorbündel  $N$  glatt trivialisierbar. Mit [Lee03, Corollary 5.11.] folgt die Behauptung.  $\square$

Das folgende Lemma basiert auf [HH06, Lemma 1.3.12.], beziehungsweise [Gün89b, Satz 3.3.], und bildet, aufbauend auf Lemma 4.1, ebenfalls eine wichtige Grundlage für weitere Konstruktionen, hierbei ist  $\mathbb{S} := [-\pi, \pi]$ .

**Lemma 4.3** *Es sei  $F_0 \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  eine freie Abbildung, wobei  $q \geq \frac{n}{2}(n+3) + 5$  gilt. Dann existiert eine Funktion  $v_1 \in C^\infty(\mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , so dass für ein beliebiges  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$  die Funktion  $u_1 := a^2 v_1 \in C^\infty(\mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

(i) *Es gilt im punktweisen Sinne in  $\mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}$ :*

$$\begin{aligned} \partial_i F_0 \cdot u_1 &= 0 \quad \text{und} \quad \partial_i F_0 \cdot \partial_t u_1 = 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq n \\ \partial_i \partial_j F_0 \cdot u_1 &= 0 \quad \text{für } 2 \leq i \leq j \leq n \end{aligned} \quad (4.21)$$

(ii) *Die Funktionen:*

$$\begin{aligned} \partial_1 F_0 + s \partial_t u_1 & \quad \partial_i F_0 \quad \text{für } 2 \leq i \leq n & \quad \partial_{ij} F_0 \quad \text{für } 2 \leq i \leq j \leq n \\ \partial_1^2 F_0 + 2s \partial_t \partial_1 u_1 & \quad \partial_1 \partial_i F_0 + s \partial_t \partial_i u_1 \quad \text{für } 2 \leq i \leq n \\ \partial_t v_1 & \quad \partial_t^2 v_1 \end{aligned} \quad (4.22)$$

*sind im punktweisen Sinne in  $\mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}$ , für alle  $s \in \mathbb{R}$ , linear unabhängig.*

(iii) *Es gilt, für eine positive Funktion  $\varrho \in C^\infty(\mathbb{S})$ :*

$$|\partial_t u_1(t, x)|_{\mathbb{R}^q}^2 = a^4(x) \varrho^2(t) \quad (4.23)$$

*für alle  $(t, x) \in \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}$ .*

(iv) *Für jedes  $x \in \overline{\mathbb{B}}$  gelten die Gleichungen:*

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \partial_t u_1(t, x) \cdot \partial_i u_1(t, x) dt &= 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq n \\ \int_{-\pi}^{\pi} \varrho(t) \partial_i F_0(x) \cdot \partial_j u_1(t, x) dt &= 0 \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq n \end{aligned} \quad (4.24)$$

*Beweis.* Da  $F_0$  eine freie Abbildung ist, und  $q \geq \frac{n}{2}(n+3) + 5$  gilt, existieren mit Lemma 4.2 Abbildungen  $f_1, \dots, f_5 \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , so dass die Abbildungen:

$$\partial_i F_0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq n, \quad \partial_k \partial_l F_0 \quad \text{für } 1 \leq k \leq l \leq n, \quad f_1, \dots, f_5 \quad (4.25)$$

in  $\overline{\mathbb{B}}$  punktweise linear unabhängig sind. Für jedes  $x \in \overline{\mathbb{B}}$  ist:

$$L_x := \text{lin}(\{\partial_i F_0(x)\}_{1 \leq i \leq n} \cup \{\partial_i \partial_j F_0(x)\}_{2 \leq i \leq j \leq n}) \subseteq \mathbb{R}^q$$

und  $P_x \in C^\infty(\mathbb{R}^q, L_x^\perp)$  die Orthogonalprojektion auf den Raum  $L_x^\perp$ . Weiterhin seien  $e_1, \dots, e_{n+5} \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  wie folgt definiert:

$$e_i(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}P_x \partial_1^2 F_0(x) & \text{für } i = 1 \\ P_x \partial_1 \partial_i F_0(x) & \text{für } i \in \{1, \dots, n\} \\ P_x f_{i-n}(x) & \text{für } i \in \{n+1, \dots, n+5\} \end{cases} \quad (4.26)$$

Wegen der punktweisen linearen Unabhängigkeit der Abbildungen in (4.25), sind die Abbildungen  $e_1, \dots, e_{n+5}$  ebenfalls punktweise linear unabhängig in  $\overline{\mathbb{B}}$ . Mit Lemma 4.1 existieren  $u, v \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , mit der Eigenschaft  $u(x), v(x) \in \text{lin}\{e_1(x), \dots, e_{n+5}(x)\}$  für alle  $x \in \overline{\mathbb{B}}$ , so dass für alle  $x \in \overline{\mathbb{B}}$  die  $(n+2)$  Vektoren:

$$u(x), v(x), e_i(x) + sP_x(a \partial_i u(x) + b \partial_i v(x)) \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (4.27)$$

für beliebige  $s \in \mathbb{R}$ , und  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a^2 + b^2 = 1$ , linear unabhängig sind. Mit Bemerkung 4.1 kann angenommen werden, dass:

$$|u(x)| = 1 = |v(x)| \quad \text{und} \quad u(x) \cdot v(x) = 0 \quad (4.28)$$

für alle  $x \in \overline{\mathbb{B}}$  gilt. Definiere nun, mit den in Lemma C.2 beschriebenen Funktionen  $\alpha_1, \alpha_2 \in C^\infty(\mathbb{S})$ , die Abbildung  $v_1 \in C^\infty(\mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  mit:

$$v_1(t, x) := \alpha_1(t) u(x) + \alpha_2(t) v(x) \quad (4.29)$$

Ist  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$  eine beliebige Abbildung, dann gilt für  $u_1 := a^2 v_1$ , unter Beachtung von (4.28), die Gleichung:

$$|\partial_t u_1(t, x)|^2 = a^4 (\alpha_1'(t)^2 + \alpha_2'(t)^2) = a^4 \varrho^2(t)$$

wobei  $\varrho \in C^\infty(\mathbb{S})$ , mit:

$$\varrho(t) = \sqrt{\alpha_1'(t)^2 + \alpha_2'(t)^2} \quad (4.30)$$

definiert ist. Dies entspricht (4.23). Da  $u(x), v(x) \in \text{lin}\{e_1(x), \dots, e_{n+5}(x)\} \subseteq L_x^\perp$  für alle  $x \in \overline{\mathbb{B}}$  gilt, ist (4.21) bewiesen. Aus (C.12) folgt, mit (4.29), die punktweise lineare Unabhängigkeit der Abbildungen  $\partial_t v_1$  und  $\partial_t^2 v_1$ , sowie:

$$\text{lin}\{\partial_t v_1(t, x), \partial_t^2 v_1(t, x)\} = \text{lin}\{u(x), v(x)\} \quad (4.31)$$

für alle  $x \in \overline{\mathbb{B}}$ . Ferner ist mit (4.26) und (4.29), für alle  $x \in \overline{\mathbb{B}}$  und  $s \in \mathbb{R}$ :

$$P_x(\partial_1^2 F_0(x) + 2s\partial_t\partial_1 v_1(t, x)) = 2e_i(x) + 2s P_x(\alpha'_1(t) \partial_1 u(x) + \alpha'_2(t) \partial_1 v(x))$$

und für  $i \in \{2, \dots, n\}$ :

$$P_x(\partial_1\partial_i F_0(x) + s\partial_t\partial_i v_1(t, x)) = e_i(x) + s P_x(\alpha'_1(t) \partial_i u(x) + \alpha'_2(t) \partial_i v(x))$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der Vektoren in (4.27), folgt mit (4.31) die punktweise lineare Unabhängigkeit der Abbildungen in (4.22). Schließlich folgen aus (C.14), zusammen mit (4.29), die Identitäten in (4.24).  $\square$

Ist eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{k \times q}$  gegeben, deren Zeilen linear unabhängig sind, dann lässt sich, für jedes  $b \in \mathbb{R}^k$ , das Gleichungssystem  $Ax = b$  lösen. Falls  $q > k$  gilt, so ist die Lösung dieses Gleichungssystems nicht eindeutig bestimmt. In Abschnitt 4.2 sollen Gleichungssysteme gelöst werden, bei denen die Koeffizienten der Matrix glatte Funktionen auf  $\overline{\mathbb{B}}$  sind. Eine vektorwertige Lösungsfunktion soll wieder eine glatte Funktion auf  $\overline{\mathbb{B}}$  sein. Um das zu gewährleisten, wird gezeigt, dass im Lösungsraum  $L(A, b) := \{x \in \mathbb{R}^q : Ax = b\}$  genau ein Element minimaler euklidischer Länge existiert.

**Lemma 4.4** *Gegeben sei eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{k \times q}$  mit  $rg(A) = k$ , und ein Vektor  $b \in \mathbb{R}^k$ . Dann existiert genau ein  $x_0 \in L(A, b)$ , so dass:*

$$|x_0|_{\mathbb{R}^q} = \min\{|x|_{\mathbb{R}^q} : x \in L(A, b)\}$$

*gilt. Diese Lösung  $x_0$  hat die Darstellung:*

$$x_0 = A^T(AA^T)^{-1}b \quad (4.32)$$

*Beweis.* Ein  $x \in L(A, b)$  besitzt, mit [Fis08, 5.4.9.], eine eindeutige Orthogonalzerlegung  $x = x^\top + x^\perp$ , wobei  $x^\top \in \text{lin}\{A^T\}$ , und  $x^\perp \in \text{lin}\{A^T\}^\perp$  erfüllt ist. Dann gilt:

$$|x|_{\mathbb{R}^q} = |x^\top|_{\mathbb{R}^q} + |x^\perp|_{\mathbb{R}^q} \geq |x^\top|_{\mathbb{R}^q} \quad (4.33)$$

Angenommen, es existiert ein  $\hat{x}_0 \in L(A, b)$ , so dass  $|\hat{x}_0|_{\mathbb{R}^q} = \min\{|x|_{\mathbb{R}^q} : x \in L(A, b)\}$  erfüllt ist, dann gilt, mit (4.33), die Gleichung  $\hat{x}_0 = A^T y$ , für ein  $y \in \mathbb{R}^k$ . Dann ist  $b = A\hat{x}_0 = AA^T y$ , woraus wegen  $rg(AA^T) = k$ , die Gleichheit  $y = (AA^T)^{-1}b$  folgt. Also



ist  $\widehat{x}_0 = x_0$ , mit dem in (4.32) definierten,  $x_0$ . Da  $x_0 \in L(A, b)$  gilt, folgt die Behauptung.  $\square$

Die Matrix  $AA^T$  wird im Allgemeinen auch als **Gramsche Matrix** bezeichnet. In diesem Zusammenhang wird  $\det(AA^T) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  als **Gramsche Determinante** bezeichnet. Es gilt:  $\det(AA^T) = 0$ , genau dann wenn  $rg(A) < k$  ist. Die Gramsche Matrix einer endlichen Menge von Zeilenvektoren gleicher Dimension, wird als die Gramsche Matrix der Matrix, in welcher die Zeilenvektoren, unter Beibehaltung der gegebenen Reihenfolge, stehen, definiert. Lemma 4.4 wird nun verwendet, um folgenden Sachverhalt zu zeigen:

**Folgerung 4.1** *Es sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  eine beschränkte offene Menge. Gegeben seien punktweise linear unabhängige Funktionen  $e_1, \dots, e_k \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^q)$ , sowie ein  $h \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^k)$ , dann existiert ein  $v \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^q)$ , so dass für alle  $i \in \{1, \dots, k\}$ , und für alle  $x \in \overline{\Omega}$  die Gleichung:*

$$e_i(x) \cdot v(x) = h_i(x) \quad (4.34)$$

*erfüllt ist.*

*Beweis.* Es sei  $A \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{k \times q})$  die matrixwertige Funktion, deren Zeilenvektoren, unter Beibehaltung der Reihenfolge, die Funktionen  $e_1^T, \dots, e_k^T$  sind. Daraus wird eine Abbildung  $\Theta \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{q \times k})$  wie folgt konstruiert:

$$\Theta(x) := A^T(x) \cdot (A(x)A^T(x))^{-1}$$

Mit Lemma 4.4 ist die Abbildung  $v \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^q)$  mit der Bildungsvorschrift:

$$v(x) := A^T(x) \cdot (A(x)A^T(x))^{-1}h(x) \quad (4.35)$$

eine Lösung des Gleichungssystems (4.34).  $\square$

## 4.2 Konstruktion der lokalen Hilfsabbildungen $F_{\epsilon, k}$

Es sei  $\varrho \in C^\infty(\mathbb{S})$ , die in (4.23) eingeführte Funktion, welche in (4.30) genau definiert worden ist. Diese Funktion wird, mittels periodischer Fortsetzung, als glatte Funktion auf ganz  $\mathbb{R}$  aufgefasst. Mit  $P \in C^\infty(\mathbb{R})$  wird eine beliebige, aber feste, Stammfunktion zu  $\varrho$  bezeichnet. Da  $\varrho(t) > 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt, ist diese Funktion streng monoton steigend, mit  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} P(t) = \pm\infty$ . Demzufolge existiert eine Funktion  $\beta \in C^\infty(\mathbb{R})$ , so dass  $P(\beta(t)) = t$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt. Mit der Kettenregel gilt dann:

$$\beta'(t) = \frac{1}{\varrho(\beta(t))} \quad (4.36)$$

Die in diesem Abschnitt zu bestimmenden Hilfsabbildungen  $F_{\epsilon,k} \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  werden wie folgt konstruiert: Zunächst wird, für jedes  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , eine Abbildung  $F_k \in C^\infty(I \times \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  mit gewissen Eigenschaften konstruiert, wobei  $I := [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  ist. Anschließend wird, unter Beachtung von Lemma C.3, für  $\epsilon \in [0, 1]$ :

$$F_{\epsilon,k}(x) := F_k(\epsilon, \beta(\epsilon^{-1}x_1), x) \quad (4.37)$$

gesetzt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \partial_1 F_{\epsilon,k}(x) &= \partial_1 F_k(\epsilon, \beta(\epsilon^{-1}x_1), x) + \frac{\beta'(\epsilon^{-1}x_1)}{\epsilon} \partial_t F_k(\epsilon, \beta(\epsilon^{-1}x_1), x) \\ &\stackrel{(4.36)}{=} \partial_1 F_k(\epsilon, \beta(\epsilon^{-1}x_1), x) + \frac{1}{\epsilon \varrho(\beta(\epsilon^{-1}x_1))} \partial_t F_k(\epsilon, \beta(\epsilon^{-1}x_1), x) \end{aligned} \quad (4.38)$$

wobei  $\partial_t$  die Ableitung nach der zweiten Komponente bezeichnet. Ferner gilt für  $i \in \{2, \dots, n\}$ :

$$\partial_i F_{\epsilon,k}(x) = \partial_i F_k(\epsilon, \beta(\epsilon^{-1}x_1), x) \quad (4.39)$$

### 4.2.1 Konstruktion der Hilfsabbildung $F_2$

Der folgende Satz stellt den Anfang, für die induktive Konstruktion der Abbildungen  $F_k \in C^\infty(I \times \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , für  $k \geq 2$ , dar.

**Satz 4.2** *Gegeben sei eine freie Abbildung  $F_0 \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , mit  $q \geq \frac{n}{2}(n+3)+5$ , und eine Abbildung  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$ . Dann existiert eine kompakte Menge  $K \subseteq \mathbb{B}$  mit  $\text{supp}(a) \subseteq K$ , so dass eine Abbildung  $F_2 \in C^\infty(I \times \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}})$  existiert, welche die Bedingung  $\text{supp}(F_2(\epsilon, t, \cdot) - F_0) \subseteq K$ , für alle  $(\epsilon, t) \subseteq I \times \mathbb{S}$  erfüllt und welche die folgenden Gleichungen erfüllt:*

(i) Für alle  $(\epsilon, t, x) \in I \times \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}$  gilt:

$$\left| \partial_1 F_2(\epsilon, t, x) + \frac{1}{\epsilon \varrho(t)} \partial_t F_2(\epsilon, t, x) \right|_{\mathbb{R}^q}^2 = |\partial_1 F_0(x)|_{\mathbb{R}^q}^2 + a^4(x) + \epsilon^3 f_{11}^{(2)}(\epsilon, t, x) \quad (4.40)$$

(ii) Für alle  $(\epsilon, t, x) \in I \times \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}$  und  $i \in \{2, \dots, n\}$  gilt:

$$\left( \partial_1 F_2(\epsilon, t, x) + \frac{1}{\epsilon \varrho(t)} \partial_t F_2(\epsilon, t, x) \right) \cdot \partial_i F_2(\epsilon, t, x) = \partial_1 F_0 \cdot \partial_i F_0 + \epsilon^3 f_{1i}^{(2)}(\epsilon, t, x) \quad (4.41)$$

(iii) Für alle  $(\epsilon, t, x) \in I \times \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}$  und  $i, j \in \{2, \dots, n\}$  mit  $i \leq j$  gilt:

$$\partial_i F_2(\epsilon, t, x) \cdot \partial_j F_2(\epsilon, t, x) = \partial_i F_0 \cdot \partial_j F_0 + \epsilon^3 f_{ij}^{(2)}(\epsilon, t, x) \quad (4.42)$$

Hierbei ist  $f^{(2)} := (f_{ij}^{(2)})_{1 \leq i \leq j \leq n} \in C^\infty(I \times \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$  mit  $\text{supp}(f^{(2)}(\epsilon, t, \cdot)) \subseteq K$ , für alle  $(\epsilon, t) \subseteq I \times \mathbb{S}$ . Diese Abbildung erfüllt die Eigenschaft:

$$\sup_{\epsilon \in I} \|\partial^\alpha f^{(2)}(\epsilon, \cdot, \cdot)\|_{\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)}} \leq C(n, |\alpha|, F_0, a) \quad (4.43)$$

für alle  $\alpha = (\partial_0, \dots, \partial_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ . Ferner gilt:

$$\max_{(\epsilon, t, x) \in I \times \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}} |F_2(\epsilon, t, x) - F_0(x)|_{\mathbb{R}^q} \leq C(n, F_0, a) \cdot \epsilon \quad (4.44)$$

*Beweis.* Es seien  $v_1$  wie in Lemma 4.3, und  $u_1 := a^2 v_1 \in C^\infty(\mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , sowie  $\varrho \in C^\infty(\mathbb{S})$  wie in (4.23). Die zu bestimmende Abbildung  $F_2$  soll die Form  $F_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2$  haben, wobei  $u_2$  in geeigneter Weise zu bestimmen ist. Zunächst wird bemerkt, dass für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  die Gleichung:

$$\partial_i F_0 \cdot \partial_j u_1 = \partial_j(\partial_i F_0 \cdot u_1) - \partial_i \partial_j F_0 \cdot u_1 \stackrel{(4.21)}{=} -\partial_i \partial_j F_0 \cdot u_1 = -a^2 \partial_i \partial_j F_0 \cdot v_1 \quad (4.45)$$

gilt. Mit (4.24) existieren Funktionen  $h_1, \dots, h_n \in C^\infty(\mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}})$ , deren periodische Fortsetzungen, bezüglich der ersten Komponente, auf ganz  $\mathbb{R}$  glatt sind, so dass die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

$$\partial_t h_1 = -\varrho \partial_1 F_0 \cdot \partial_1 u_1 - \partial_t u_1 \cdot \partial_1 u_1 \stackrel{(4.45)}{=} a^2 \varrho \partial_1^2 F_0 \cdot v_1 - a^2 \partial_t v_1 \cdot \partial_1 u_1 \quad (4.46)$$

und für alle  $i \in \{2, \dots, n\}$ :

$$\begin{aligned} \partial_t h_i &= -\varrho \partial_1 F_0 \cdot \partial_i u_1 - \varrho \partial_i F_0 \cdot \partial_1 u_1 - \partial_t u_1 \cdot \partial_i u_1 \\ &\stackrel{(4.45)}{=} a^2 \varrho \partial_1 \partial_i F_0 \cdot v_1 + a^2 \varrho \partial_i \partial_1 F_0 \cdot v_1 - a^2 \partial_t v_1 \cdot \partial_i u_1 \end{aligned} \quad (4.47)$$

Die Funktionen  $h_1, \dots, h_n$  können so gewählt werden, dass sie jeweils ein Produkt der Funktion  $a^2$ , und einer Funktion aus dem Raum  $C^\infty(\mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}})$  sind. Mit der punktweisen linearen Unabhängigkeit der Abbildungen in (4.22) und Folgerung 4.1, existiert dann ein

$\widehat{u}_2 \in C^\infty(\mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , so dass das folgende Gleichungssystem gilt:

$$\begin{aligned}
\left( \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \right) \cdot \widehat{u}_2 &= h_1 \\
\partial_i F_0 \cdot \widehat{u}_2 &= h_i \quad \text{für } 2 \leq i \leq n \\
\left( \partial_1^2 F_0 + \frac{2}{\varrho} \partial_t \partial_1 u_1 \right) \cdot \widehat{u}_2 &= \frac{1}{2} (|\partial_1 u_1|_{\mathbb{R}^q}^2 + 2\partial_1 h_1) \\
\left( \partial_1 \partial_i F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t \partial_i u_1 \right) \cdot \widehat{u}_2 &= \frac{1}{2} (\partial_1 u_1 \cdot \partial_i u_1 + \partial_1 h_i + \partial_i h_1) \quad \text{für } 2 \leq i \leq n \\
\partial_i \partial_j F_0 \cdot \widehat{u}_2 &= \frac{1}{2} (\partial_i u_1 \cdot \partial_j u_1 + \partial_i h_j + \partial_j h_i) \quad \text{für } 2 \leq i \leq j \leq n \\
\partial_t v_1 \cdot \widehat{u}_2 &= 0 \quad \quad \quad \partial_t^2 v_1 \cdot \widehat{u}_2 = 0
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Dabei ist zu beachten, dass die rechten Seiten im Gleichungssystem (4.48) jeweils ein Produkt der Abbildung  $a$ , mit einer Abbildung aus dem Raum  $C^\infty(\mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}})$  sind, weshalb sich, unter Verwendung der Formel (4.35), auch  $\widehat{u}_2$  als Produkt von  $a$  und einer Funktion aus  $C^\infty(\mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  darstellen lässt. Nun wird ein  $\widehat{v}_2 \in C^\infty(\mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  bestimmt, so dass das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
\left( \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \right) \cdot \widehat{v}_2 &= -\partial_1 u_1 \cdot \widehat{u}_2 \\
\partial_i F_0 \cdot \widehat{v}_2 &= -\partial_i u_1 \cdot \widehat{u}_2 \quad \text{für } 2 \leq i \leq n \\
\partial_t v_1 \cdot \widehat{v}_2 &= 0 \\
\partial_t^2 v_1 \cdot \widehat{v}_2 &= \frac{1}{2a^2} |\partial_t \widehat{u}_2|_{\mathbb{R}^q}^2
\end{aligned} \tag{4.49}$$

gilt. Dabei ist zu beachten, dass mit der obigen Bemerkung und [Lee03, Proposition 2.26] eine Funktion  $\overline{u} \in C^\infty(\mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  existiert, die in einer kompakten Teilmenge  $K \subseteq \mathbb{B}$  mit  $\text{supp}(a) \subseteq K$  enthalten ist, so dass  $\partial_t \widehat{u}_2 = a \overline{u}$  gilt. Unter Verwendung der Formel (4.35) lässt sich dann  $\text{supp}(\widehat{v}_2(t, \cdot)) \subseteq K$ , für alle  $t \in \mathbb{S}$ , erreichen. Definiere nun eine Abbildung  $u_2 \in C^\infty(I \times \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}})$  mit:

$$u_2(\epsilon, t, x) := \widehat{u}_2(t, x) + \epsilon \widehat{v}_2(t, x) \tag{4.50}$$

Mit (4.48) und (4.49) gelten dann die Gleichungen:

$$\left( \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 + \epsilon \partial_1 u_1 \right) \cdot u_2 = h_1 + \Lambda(\epsilon^2) \tag{4.51}$$

$$(\partial_i F_0 + \epsilon \partial_i u_1) \cdot u_2 = h_i + \Lambda(\epsilon^2) \quad \text{für } 2 \leq i \leq n \quad (4.52)$$

$$\left( \partial_1^2 F_0 + \frac{2}{\varrho} \partial_t \partial_1 u_1 \right) \cdot u_2 = \frac{1}{2} (|\partial_1 u_1|_{\mathbb{R}^q}^2 + 2 \partial_1 h_1) + \Lambda(\epsilon) \quad (4.53)$$

$$\left( \partial_1 \partial_i F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t \partial_i u_1 \right) \cdot u_2 = \frac{1}{2} (\partial_1 u_1 \cdot \partial_i u_1 + \partial_1 h_i + \partial_i h_1) + \Lambda(\epsilon) \quad \text{für } 2 \leq i \leq n \quad (4.54)$$

$$\partial_i \partial_j F_0 \cdot u_2 = \frac{1}{2} (\partial_i u_1 \cdot \partial_j u_1 + \partial_i h_j + \partial_j h_i) + \Lambda(\epsilon) \quad \text{für } 2 \leq i \leq j \leq n \quad (4.55)$$

$$\partial_t u_1 \cdot u_2 = 0 \quad (4.56)$$

$$\partial_t^2 u_1 \cdot u_2 = \frac{\epsilon}{2} |\partial_t u_2|_{\mathbb{R}^q}^2 + \Lambda(\epsilon^2) \quad (4.57)$$

Hierbei sei vereinbart, dass  $\Lambda(\epsilon^k)$ , mit  $k \in \mathbb{N}$ , für einen geeigneten Ausdruck der Form  $\epsilon^k h$ , wobei  $h \in C^\infty(I \times \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}})$ , mit  $h(\epsilon, t, \cdot) \subseteq K$  für alle  $(\epsilon, t) \in I \times \mathbb{S}$ , steht. Nun wird für  $F_2 \in C^\infty(I \times \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}})$  mit:

$$F_2(\epsilon, t, x) := F_0(x) + \epsilon u_1(t, x) + \epsilon^2 u_2(\epsilon, t, x) \quad (4.58)$$

gezeigt, dass die Gleichungen (4.40) bis (4.42) gelten. Vorher sei erwähnt, dass wegen  $u_1 = a^2 v_1$  und (4.50) beziehungsweise (4.58), die Bedingung  $\text{supp}(F_2(\epsilon, t, \cdot) - F_0) \subseteq K$  für alle  $(\epsilon, t) \subseteq I \times \mathbb{S}$ , erfüllt ist. Zuerst wird (4.40) gezeigt:

$$\begin{aligned} & \left| \partial_1 F_2 + \frac{1}{\epsilon \varrho} \partial_t F_2 \right|_{\mathbb{R}^q}^2 \stackrel{(4.58)}{=} \left| \partial_1 F_0 + \epsilon \partial_1 u_1 + \epsilon^2 \partial_1 u_2 + \frac{1}{\epsilon \varrho} \underbrace{\partial_t F_0}_{=0} + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 + \frac{\epsilon}{\varrho} \partial_t u_2 \right|_{\mathbb{R}^q}^2 \\ &= |\partial_1 F_0|_{\mathbb{R}^q}^2 + \frac{1}{\varrho^2} \underbrace{|\partial_t u_1|_{\mathbb{R}^q}^2}_{\stackrel{(4.23)}{=} a^4 \varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \underbrace{\partial_1 F_0 \cdot \partial_t u_1}_{\stackrel{(4.21)}{=} 0} + 2\epsilon \left( \partial_1 u_1 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_2 \right) \cdot \left( \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \right) \\ & \quad + \epsilon^2 \left| \partial_1 u_1 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_2 \right|^2 + 2\epsilon^2 \left( \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \right) \cdot \partial_1 u_2 + \Lambda(\epsilon^3) \\ &= |\partial_1 F_0|_{\mathbb{R}^q}^2 + a^4 + 2\epsilon \left( \partial_1 u_1 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_2 \right) \cdot \left( \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \right) \\ & \quad + \epsilon^2 \left( |\partial_1 u_1|_{\mathbb{R}^q}^2 + \frac{2}{\varrho} \partial_1 u_1 \cdot \partial_t u_2 + \frac{1}{\varrho^2} |\partial_t u_2|_{\mathbb{R}^q}^2 \right) + 2\epsilon^2 \left( \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \right) \cdot \partial_1 u_2 + \Lambda(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (4.59)$$

Der dritte Summand auf der rechten Seite wird weiter umgeformt:

$$\begin{aligned}
& \left( \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \right) \cdot \left( \partial_1 u_1 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_2 \right) \\
&= \left( \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \right) \cdot \partial_1 u_1 + \frac{1}{\varrho} \partial_t \left[ \underbrace{\left( \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \right) \cdot u_2}_{\stackrel{(4.51)}{=} h_1 - \epsilon \partial_1 u_1 \cdot u_2 + \Lambda(\epsilon^2)}} \right] - \frac{1}{\varrho} \underbrace{\partial_t \partial_1 F_0 \cdot u_2}_{=0} \\
&\quad - \frac{1}{\varrho^2} \underbrace{\partial_t^2 u_1 \cdot u_2}_{\stackrel{(4.57)}{=} \frac{\epsilon}{2} |\partial_t u_2|_{\mathbb{R}^q}^2 + \Lambda(\epsilon^2)}} - \frac{1}{\varrho} \partial_t \left( \frac{1}{\varrho} \right) \underbrace{\partial_t u_1 \cdot u_2}_{\stackrel{(4.56)}{=} 0} \\
&= \left( \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \right) \cdot \partial_1 u_1 + \frac{1}{\varrho} \partial_t h_1 - \frac{\epsilon}{\varrho} \partial_t (\partial_1 u_1 \cdot u_2) - \frac{\epsilon}{2\varrho^2} |\partial_t u_2|_{\mathbb{R}^q}^2 + \Lambda(\epsilon^2) \\
&\stackrel{(4.46)}{=} - \frac{\epsilon}{\varrho} \partial_t (\partial_1 u_1 \cdot u_2) - \frac{\epsilon}{2\varrho^2} |\partial_t u_2|_{\mathbb{R}^q}^2 + \Lambda(\epsilon^2)
\end{aligned}$$

Es folgt mit (4.59):

$$\begin{aligned}
& \left| \partial_1 F_2 + \frac{1}{\epsilon \varrho} \partial_t F_2 \right|_{\mathbb{R}^q}^2 = |\partial_1 F_0|_{\mathbb{R}^q}^2 + a^4 \\
&\quad + \epsilon^2 \left[ |\partial_1 u_1|_{\mathbb{R}^q}^2 + \frac{2}{\varrho} \partial_1 u_1 \cdot \partial_t u_2 - \frac{2}{\varrho} \partial_t (\partial_1 u_1 \cdot u_2) + 2 \left( \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \right) \cdot \partial_1 u_2 \right] + \Lambda(\epsilon^3) \\
&= |\partial_1 F_0|_{\mathbb{R}^q}^2 + a^4 + \epsilon^2 \left[ |\partial_1 u_1|_{\mathbb{R}^q}^2 - \frac{2}{\varrho} \partial_t \partial_1 u_1 \cdot u_2 + 2 \left( \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \right) \cdot \partial_1 u_2 \right] + \Lambda(\epsilon^3) \\
&= |\partial_1 F_0|_{\mathbb{R}^q}^2 + a^4 \\
&\quad + \epsilon^2 \left[ |\partial_1 u_1|_{\mathbb{R}^q}^2 - \underbrace{2 \left( \partial_1^2 F_0 + \frac{2}{\varrho} \partial_t \partial_1 u_1 \right) \cdot u_2}_{\stackrel{(4.53)}{=} |\partial_1 u_1|_{\mathbb{R}^q}^2 + 2\partial_1 h_1 + \Lambda(\epsilon)}} + 2\partial_1 \left( \underbrace{\left( \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \right) \cdot u_2}_{\stackrel{(4.51)}{=} h_1 + \Lambda(\epsilon)}} \right) \right] + \Lambda(\epsilon^3) \\
&\stackrel{(4.56)}{=} |\partial_1 F_0|_{\mathbb{R}^q}^2 + a^4 + \epsilon^3 f_{11}^{(2)}
\end{aligned}$$

Nun wird (4.41) gezeigt, es sei  $i \in \{2, \dots, n\}$ , dann ist unter Beachtung von (4.21)

$$\begin{aligned}
& \left( \partial_1 F_2 + \frac{1}{\epsilon \varrho} \partial_t F_2 \right) \cdot \partial_i F_2 \\
& \stackrel{(4.58)}{=} \left( \partial_1 F_0 + \epsilon \partial_1 u_1 + \epsilon^2 \partial_1 u_2 + \frac{1}{\epsilon \varrho} \underbrace{\partial_t F_0}_{=0} + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 + \frac{\epsilon}{\varrho} \partial_t u_2 \right) \cdot (\partial_i F_0 + \epsilon \partial_i u_1 + \epsilon^2 \partial_i u_2) \\
& = \partial_1 F_0 \cdot \partial_i F_0 + \epsilon \left[ \left( \partial_1 u_1 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_2 \right) \cdot \partial_i F_0 + \left( \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \right) \cdot \partial_i u_1 \right] \\
& + \epsilon^2 \left[ \left( \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \right) \cdot \partial_i u_2 + \left( \partial_1 u_1 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_2 \right) \cdot \partial_i u_1 + \partial_1 u_2 \cdot \partial_i F_0 \right] + \Lambda(\epsilon^3)
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Der Term in der ersten eckigen Klammer wird unter dem Aspekt untersucht,  $\epsilon$  zu isolieren:

$$\begin{aligned}
& \left( \partial_1 u_1 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_2 \right) \cdot \partial_i F_0 + \left( \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \right) \cdot \partial_i u_1 \\
& = \frac{1}{\varrho} \partial_t u_2 \cdot \partial_i F_0 + \partial_1 F_0 \cdot \partial_i u_1 + \partial_i F_0 \cdot \partial_1 u_1 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \cdot \partial_i u_1 \\
& \stackrel{(4.47)}{=} \frac{1}{\varrho} \partial_t (u_2 \cdot \partial_i F_0) - \frac{1}{\varrho} \partial_t h_i \stackrel{(4.52)}{=} \frac{1}{\varrho} \partial_t h_i - \frac{\epsilon}{\varrho} \partial_t (\partial_i u_1 \cdot u_2) - \frac{1}{\varrho} \partial_t h_i + \Lambda(\epsilon^2) \\
& = -\frac{\epsilon}{\varrho} \partial_t (\partial_i u_1 \cdot u_2) + \Lambda(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Nun wird der Ausdruck in der zweiten eckigen Klammer in (4.60) umgeformt:

$$\begin{aligned}
& \left( \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \right) \cdot \partial_i u_2 + \left( \partial_1 u_1 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_2 \right) \cdot \partial_i u_1 + \partial_1 u_2 \cdot \partial_i F_0 \\
&= \partial_1 F_0 \cdot \partial_i u_2 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \cdot \partial_i u_2 + \left( \partial_1 u_1 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_2 \right) \cdot \partial_i u_1 + \partial_1 u_2 \cdot \partial_i F_0 \\
&= \underbrace{\partial_i(\partial_1 F_0 \cdot u_2)}_{\stackrel{(4.51)}{=} \partial_i h_1 + \Lambda(\epsilon)} - \partial_i \partial_1 F_0 \cdot u_2 + \frac{1}{\varrho} \partial_i \underbrace{(\partial_t u_1 \cdot u_2)}_{\stackrel{(4.56)}{=} 0} - \frac{1}{\varrho} \partial_t \partial_i u_1 \cdot u_2 \\
&\quad + \left( \partial_1 u_1 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_2 \right) \cdot \partial_i u_1 + \underbrace{\partial_1(u_2 \cdot \partial_i F_0)}_{\stackrel{(4.52)}{=} \partial_1 h_i + \Lambda(\epsilon)} - u_2 \cdot \partial_1 \partial_i F_0 \\
&= \partial_1 h_i + \partial_i h_1 - \frac{1}{\varrho} \partial_t \partial_i u_1 \cdot u_2 - \underbrace{2 \partial_i \partial_1 F_0 \cdot u_2}_{\stackrel{(4.54)}{=} \partial_1 u_1 \cdot \partial_i u_1 + \partial_1 h_i + \partial_i h_1 - \frac{2}{\varrho} \partial_t \partial_i u_1 \cdot u_2 + \Lambda(\epsilon)}} \\
&\quad + \left( \partial_1 u_1 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_2 \right) \cdot \partial_i u_1 + \Lambda(\epsilon) \\
&= \frac{1}{\varrho} \partial_t \partial_i u_1 \cdot u_2 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_2 \cdot \partial_i u_1 + \Lambda(\epsilon) = \frac{1}{\varrho} \partial_t (\partial_i u_1 \cdot u_2) + \Lambda(\epsilon)
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Aus (4.60), (4.61) und (4.62) folgt:

$$\begin{aligned}
& \left( \partial_1 F_2 + \frac{1}{\epsilon \varrho} \partial_t F_2 \right) \cdot \partial_i F_2 \\
&= \partial_1 F_0 \cdot \partial_i F_0 + \epsilon^2 \left( -\frac{1}{\varrho} \partial_t (\partial_i u_1 \cdot u_2) + \frac{1}{\varrho} \partial_t (\partial_i u_1 \cdot u_2) \right) + \Lambda(\epsilon^3) \\
&= \partial_1 F_0 \cdot \partial_i F_0 + \epsilon^3 f_{1i}^{(2)}
\end{aligned}$$

Schließlich wird noch (4.42) gezeigt. Es seien  $i, j \in \{2, \dots, n\}$  mit  $i \leq j$ :

$$\begin{aligned}
& \partial_i F_2 \cdot \partial_j F_2 = (\partial_i F_0 + \epsilon \partial_i u_1 + \epsilon^2 \partial_i u_2) \cdot (\partial_j F_0 + \epsilon \partial_j u_1 + \epsilon^2 \partial_j u_2) \\
&\stackrel{(4.58)}{=} \partial_i F_0 \cdot \partial_j F_0 + \epsilon (\partial_i F_0 \cdot \partial_j u_1 + \partial_i u_1 \cdot \partial_j F_0) \\
&\quad + \epsilon^2 (\partial_i F_0 \cdot \partial_j u_2 + \partial_i u_1 \cdot \partial_j u_1 + \partial_i u_2 \cdot \partial_j F_0) + \Lambda(\epsilon^3) \\
&\stackrel{(4.45)}{=} \partial_i F_0 \cdot \partial_j F_0 - \epsilon a^2 \underbrace{(\partial_i \partial_j F_0 \cdot v_1)}_{\stackrel{(4.21)}{=} 0} + \underbrace{v_1 \cdot \partial_j \partial_i F_0}_{\stackrel{(4.21)}{=} 0} \\
&\quad + \epsilon^2 \left[ \underbrace{\partial_j(\partial_i F_0 \cdot u_2)}_{\stackrel{(4.52)}{=} \partial_j h_i + \Lambda(\epsilon)} - \partial_j \partial_i F_0 \cdot u_2 + \partial_i u_1 \cdot \partial_j u_1 + \underbrace{\partial_i(u_2 \cdot \partial_j F_0)}_{\stackrel{(4.52)}{=} \partial_i h_j + \Lambda(\epsilon)} - u_2 \cdot \partial_i \partial_j F_0 \right] + \Lambda(\epsilon^3)
\end{aligned}$$



$$\stackrel{(4.55)}{=} \partial_i F_0 \cdot \partial_j F_0 + \epsilon^3 f_{ij}^{(2)}$$

Abschließend sei noch erwähnt, dass mit (4.58), wegen  $u_2 \in C^\infty(I \times \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}})$ , die Abschätzung (4.44) erfüllt ist.  $\square$

### 4.2.2 Konstruktion der Hilfsabbildung $F_k$ für $k \geq 3$

Satz 4.2 wird nun zu folgendem Satz verallgemeinert:

**Satz 4.3** *Gegeben sei eine freie Abbildung  $F_0 \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , mit  $q \geq \frac{n}{2}(n+3) + 5$ , und eine Abbildung  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$ . Dann existiert eine kompakte Menge  $K \subseteq \mathbb{B}$ , mit  $\text{supp}(a) \subseteq K$ , so dass die folgende Aussage gilt: Für jedes  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  existiert eine Abbildung  $F_k \in C^\infty(I \times \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}})$ , welche die Bedingung  $\text{supp}(F_k(\epsilon, t, \cdot) - F_0) \subseteq K$  für alle  $(\epsilon, t) \subseteq I \times \mathbb{S}$  erfüllt, und welche die folgenden Gleichungen erfüllt:*

(i) Für alle  $(\epsilon, t, x) \in I \times \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}$  gilt:

$$\left| \partial_1 F_k(\epsilon, t, x) + \frac{1}{\epsilon \varrho(t)} \partial_t F_k(\epsilon, t, x) \right|_{\mathbb{R}^q}^2 = |\partial_1 F_0(x)|_{\mathbb{R}^q}^2 + a^4(x) + \epsilon^{k+1} f_{11}^{(k)}(\epsilon, t, x) \quad (4.63)$$

(ii) Für alle  $(\epsilon, t, x) \in I \times \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}$  und  $i \in \{2, \dots, n\}$  gilt:

$$\left( \partial_1 F_k(\epsilon, t, x) + \frac{1}{\epsilon \varrho(t)} \partial_t F_k(\epsilon, t, x) \right) \cdot \partial_i F_k(\epsilon, t, x) = \partial_1 F_0 \cdot \partial_i F_0 + \epsilon^{k+1} f_{1i}^{(k)}(\epsilon, t, x) \quad (4.64)$$

(iii) Für alle  $(\epsilon, t, x) \in I \times \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}$  und  $i, j \in \{2, \dots, n\}$  mit  $i \leq j$  gilt:

$$\partial_i F_k(\epsilon, t, x) \cdot \partial_j F_k(\epsilon, t, x) = \partial_i F_0 \cdot \partial_j F_0 + \epsilon^{k+1} f_{ij}^{(k)}(\epsilon, t, x) \quad (4.65)$$

Hierbei ist  $f^{(k)} := (f_{ij}^{(k)})_{1 \leq i \leq j \leq n} \in C^\infty(I \times \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$  mit  $\text{supp}(f^{(k)}(\epsilon, t, \cdot)) \subseteq K$  für alle  $(\epsilon, t) \subseteq I \times \mathbb{S}$ . Diese Abbildung erfüllt die Eigenschaft:

$$\sup_{\epsilon \in I} \left\| \partial^\alpha f^{(k)}(\epsilon, \cdot, \cdot) \right\|_{\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)}} \leq C(n, k, |\alpha|, F_0, a) \quad (4.66)$$

für alle  $\alpha = (\partial_0, \dots, \partial_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ . Ferner gilt:

$$\max_{(\epsilon, t, x) \in I \times \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}} |F_k(\epsilon, t, x) - F_0(x)|_{\mathbb{R}^q} \leq C(n, k, F_0, a) \cdot \epsilon \quad (4.67)$$

*Beweis.* Der Satz wird mittels Induktion über  $k$  bewiesen. Mit Satz 4.2 stimmt die Aussage für  $k = 2$ . Nun sei die Aussage für ein  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  richtig. Es wird ein  $u_{k+1} \in C^\infty(I \times \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  bestimmt, so dass die Abbildung  $F_{k+1} := F_k + \epsilon^{k+1}u_{k+1}$  die gewünschten Eigenschaften besitzt. Da  $F_k$  die Gleichungen (4.63) bis (4.65) erfüllt, existiert ein  $h := (h_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n} \subseteq C^\infty(\mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$ , mit  $\text{supp}(h(t, \cdot)) \subseteq K$  für alle  $t \in \mathbb{S}$ , so dass:

$$\left| \partial_1 F_k + \frac{1}{\epsilon \varrho} \partial_t F_k \right|_{\mathbb{R}^q}^2 = |\partial_1 F_0|_{\mathbb{R}^q}^2 + a^4 + \epsilon^{k+1} h_{11} + \Lambda(\epsilon^{k+2}) \quad (4.68)$$

$$\left( \partial_1 F_k + \frac{1}{\epsilon \varrho} \partial_t F_k \right) \cdot \partial_i F_k = \partial_1 F_0 \cdot \partial_i F_0 + \epsilon^{k+1} h_{1i} + \Lambda(\epsilon^{k+2}) \quad \text{für } 2 \leq i \leq n \quad (4.69)$$

$$\partial_i F_k \cdot \partial_j F_k = \partial_i F_0 \cdot \partial_j F_0 + \epsilon^{k+1} h_{ij} + \Lambda(\epsilon^{k+2}) \quad \text{für } 2 \leq i \leq j \leq n \quad (4.70)$$

erfüllt ist. Dabei sei für den Induktionsschritt von  $k = 2$  auf  $k+1 = 3$  auf das Gleichungssystem (4.51) bis (4.57) verwiesen. Analog zu (4.50) soll die Abbildung  $u_{k+1}$  von der Form  $\widehat{u}_{k+1} + \epsilon \widehat{v}_{k+1}$  sein, wobei  $\widehat{u}_{k+1}, \widehat{v}_{k+1} \in C^\infty(\mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  mit  $\text{supp}(\widehat{u}_{k+1}(t, \cdot)), \text{supp}(\widehat{v}_{k+1}(t, \cdot)) \subseteq K$  für alle  $t \in \mathbb{S}$ . Dazu soll die Abbildung  $u_{k+1}$  so gewählt werden, dass das Gleichungssystem:

$$(\partial_i F_0 + \epsilon \partial_i u_1) \cdot u_{k+1} = \Lambda(\epsilon^2) \quad \text{für } 2 \leq i \leq n \quad (4.71)$$

$$\left[ \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 + \epsilon \left( \partial_1 u_1 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_2 \right) \right] \cdot u_{k+1} = \Lambda(\epsilon^2) \quad (4.72)$$

$$\partial_i \partial_j F_0 \cdot u_{k+1} = \frac{1}{2} h_{ij} + \Lambda(\epsilon) \quad \text{für } 2 \leq i \leq j \leq n \quad (4.73)$$

$$\left( \partial_1 \partial_i F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t \partial_i u_1 \right) \cdot u_{k+1} = \frac{1}{2} h_{1i} + \Lambda(\epsilon) \quad \text{für } 2 \leq i \leq n \quad (4.74)$$

$$\left[ \partial_1^2 F_0 + \frac{2}{\varrho} \partial_t \partial_1 u_1 + \frac{1}{\epsilon \varrho} \partial_t \left( \frac{\partial_t u_1 + \epsilon \partial_t u_2}{\varrho} \right) \right] \cdot u_{k+1} = \frac{1}{2} h_{11} + \Lambda(\epsilon) \quad (4.75)$$

erfüllt ist. Nun wird beschrieben, wie  $\widehat{u}_{k+1}$  und  $\widehat{v}_{k+1}$  gewählt werden können, damit die Abbildung  $u_{k+1} = \widehat{u}_{k+1} + \epsilon \widehat{v}_{k+1}$  das Gleichungssystem (4.71) bis (4.75) erfüllt. In (4.50) wurde die Funktion  $u_2$  als Summe  $u_2 = \widehat{u}_2 + \epsilon \widehat{v}_2$  eingeführt. Nach Konstruktion von  $\widehat{u}_2$  in (4.48) gilt die Abschätzung:

$$|\partial_t \widehat{u}_2(t, x)|_{\mathbb{R}^q} + |\partial_t^2 \widehat{u}_2(t, x)|_{\mathbb{R}^q} \leq C \cdot |a(x)|$$

für alle  $(t, x) \in \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}$ . Hierbei ist  $C \in \mathbb{R}_{>0}$  eine Konstante, die weder von  $t$  noch

von  $x$  abhängt, aber darüber hinaus nicht weiter spezifiziert wird. Wegen der stetigen Abhängigkeit der Determinante von den Matrixeinträgen, existiert, mit der punktweisen linearen Unabhängigkeit der Funktionen in (4.22), ein  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass die  $\frac{n}{2}(n+3) + 2$  Vektoren:

$$\begin{aligned} & \partial_1 F_0(x) + \frac{1}{\varrho(t)} \partial_t u_1(t, x) & \partial_i F_0(x) & \text{für } 2 \leq i \leq n \\ & \partial_1^2 F_0(x) + \frac{2}{\varrho(t)} \partial_t \partial_1 u_1(t, x) + \frac{1}{\varrho(t)} \partial_t \left( \frac{\partial_t \hat{u}_2(t, x)}{\varrho(t)} \right) & & \\ & \partial_1 \partial_i F_0(x) + \frac{1}{\varrho(t)} \partial_t \partial_i u_1(t, x) & \text{für } 2 \leq i \leq n & \quad \partial_i \partial_j F_0(x) \quad \text{für } 2 \leq i \leq j \leq n \\ & \partial_t v_1(t, x) & & \quad \partial_t^2 v_1(t, x) \end{aligned} \quad (4.76)$$

für alle  $(t, x) \in \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}$ , mit  $|a(x)| < \delta$ , linear unabhängig sind. Definiere nun offene Mengen  $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{B}$  mit:

$$U_1 := \{x \in \mathbb{B} : |a(x)| < \delta\} \quad U_2 := \left\{x \in \mathbb{B} : |a(x)| > \frac{\delta}{2}\right\} \quad (4.77)$$

und wähle eine Zerlegung der Eins, bezüglich der offenen Überdeckung  $\{U_1, U_2\}$ , also  $\varphi_1, \varphi_2 \in C^\infty(\mathbb{B})$  mit  $\text{supp}(\varphi_l) \subseteq U_l$ , für  $l \in \{1, 2\}$ , und  $\varphi_1 + \varphi_2 \equiv 1$ , und definiere für  $l \in \{1, 2\}$  jeweils  $h^{(l)} \in C^\infty(\mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$  mit:

$$(h_{ij}^{(l)})_{1 \leq i \leq j \leq n} := (\varphi_l \cdot h_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$$

Dann ist die Bedingung  $\text{supp}(h^{(l)}(t, \cdot)) \subseteq K$  für alle  $t \in \mathbb{S}$  erfüllt. Nun werden Abbildungen  $u_{k+1}^{(l)} \in C^\infty(\mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  konstruiert, so dass  $u_{k+1}^{(l)}$  jeweils das Gleichungssystem (4.71) bis (4.75), für  $h = h^{(l)}$ , löst. Die Funktionen  $u_{k+1}^{(l)}$  sollen dabei die Form  $\hat{u}_{k+1}^{(l)} + \epsilon \hat{u}_{k+1}^{(l)}$  haben, wobei  $\hat{u}_{k+1}^{(l)}, \hat{v}_{k+1}^{(l)} \in C^\infty(\mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , mit  $\hat{u}_{k+1}^{(l)}(t, \cdot) \subseteq K$ , und  $\hat{v}_{k+1}^{(l)}(t, \cdot) \subseteq K$  für alle  $t \in \mathbb{S}$ , erfüllt sein soll. Mit der linearen Unabhängigkeit der Vektoren in (4.76), existieren, unter Beachtung dass  $u_1 = a^2 v_1$  gilt, Abbildungen  $\hat{u}_{k+1}^{(1)} \in C^\infty(\mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  und  $\hat{v}_{k+1}^{(1)} \in C^\infty(\mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , so dass:

$$\begin{aligned} & \partial_i F_0 \cdot \hat{u}_{k+1}^{(1)} = 0 \quad \text{für } 2 \leq i \leq n \\ & \left( \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \right) \cdot \hat{u}_{k+1}^{(1)} = 0 \\ & \partial_i \partial_j F_0 \cdot \hat{u}_{k+1}^{(1)} = \frac{h_{ij}^{(1)}}{2} \quad \text{für } 2 \leq i \leq j \leq n \\ & \left( \partial_1 \partial_i F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t \partial_i u_1 \right) \cdot \hat{u}_{k+1}^{(1)} = \frac{h_{1i}^{(1)}}{2} \quad \text{für } 2 \leq i \leq n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[ \partial_1^2 F_0 + \frac{2}{\varrho} \partial_t \partial_1 u_1 + \frac{1}{\varrho} \partial_t \left( \frac{\partial_t \widehat{u}_2}{\varrho} \right) \right] \cdot \widehat{u}_{k+1}^{(1)} &= \frac{h_{11}^{(1)}}{2} \\ \partial_t v_1 \cdot \widehat{u}_{k+1}^{(1)} &= 0 \\ \partial_t^2 v_1 \cdot \widehat{u}_{k+1}^{(1)} &= 0 \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} \partial_i F_0 \cdot \widehat{v}_{k+1}^{(1)} &= -\partial_i u_1 \cdot \widehat{u}_{k+1}^{(1)} \quad \text{für } 2 \leq i \leq n \\ \left( \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \right) \cdot \widehat{v}_{k+1}^{(1)} &= - \left( \partial_1 u_1 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_2 \right) \cdot \widehat{u}_{k+1}^{(1)} \\ \partial_t v_1 \cdot \widehat{v}_{k+1}^{(1)} &= 0 \\ \partial_t^2 v_1 \cdot \widehat{v}_{k+1}^{(1)} &= 0 \end{aligned}$$

woraus, für  $u_{k+1}^{(1)} := \widehat{u}_{k+1}^{(1)} + \epsilon \widehat{v}_{k+1}^{(1)}$ , die Gültigkeit des Gleichungssystems (4.71) bis (4.75) für  $h = h^{(1)}$  folgt. Um das System (4.71) bis (4.75) für den Fall  $l = 2$  zu lösen, wird folgende Vorüberlegung betrachtet: Die Gleichung (4.75) wird mit  $\epsilon$  multipliziert:

$$\left[ \epsilon \partial_1^2 F_0 + \frac{2\epsilon}{\varrho} \partial_t \partial_1 u_1 + \frac{1}{\varrho} \partial_t \left( \frac{\partial_t u_1 + \epsilon \partial_t u_2}{\varrho} \right) \right] \cdot u_{k+1}^{(2)} = \frac{\epsilon h_{11}^{(2)}}{2} + \Lambda(\epsilon^2)$$

Diese Gleichung ist mit (4.50) aber erfüllt, falls die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{\varrho^2} \partial_t^2 u_1 + \epsilon \partial_1^2 F_0 + \frac{2\epsilon}{\varrho} \partial_t \partial_1 u_1 + \frac{\epsilon}{\varrho} \partial_t \left( \frac{\partial_t \widehat{u}_2}{\varrho} \right) \right] \cdot u_{k+1}^{(2)} &= \frac{\epsilon h_{11}^{(2)}}{2} + \Lambda(\epsilon^2) \\ \partial_t v_1 \cdot u_{k+1}^{(2)} &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt sind. Wegen  $|a(x)| > \frac{\delta}{2}$ , für alle  $x \in U_2$ , sind die  $\frac{n}{2}(n+3) + 1$  Vektoren:

$$\begin{array}{ll} \partial F_0(x) + \frac{1}{\varrho(t)} \partial_t u_1(t, x) & \partial_i F_0(x) \quad \text{für } 2 \leq i \leq n \\ \partial_1 \partial_i F_0(x) + \frac{1}{\varrho(t)} \partial_t \partial_i u_1(t, x) & \text{für } 2 \leq i \leq n \quad \partial_i \partial_j F_0(x) \quad \text{für } 2 \leq i \leq j \leq n \\ \partial_t v_1(t, x) & \partial_t^2 u_1(t, x) \end{array} \quad (4.78)$$

für alle  $(t, x) \in \mathbb{S} \times U_2$  linear unabhängig. Um das Gleichungssystem (4.71) bis (4.75) für  $h = h^{(2)}$  zu lösen, wird, unter Beachtung der linearen Unabhängigkeit der Vektoren

in (4.78), das folgende Gleichungssystem gelöst:

$$\begin{aligned}
\partial_i F_0 \cdot \widehat{u}_{k+1}^{(2)} &= 0 \quad \text{für } 2 \leq i \leq n \\
\left( \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \right) \cdot \widehat{u}_{k+1}^{(2)} &= 0 \\
\partial_i \partial_j F_0 \cdot \widehat{u}_{k+1}^{(2)} &= \frac{h_{ij}^{(2)}}{2} \quad \text{für } 2 \leq i \leq j \leq n \\
\left( \partial_1 \partial_i F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t \partial_i u_1 \right) \cdot \widehat{u}_{k+1}^{(2)} &= \frac{h_{1i}^{(2)}}{2} \quad \text{für } 2 \leq i \leq n \\
\partial_t^2 u_1 \cdot \widehat{u}_{k+1}^{(2)} &= 0 \\
\partial_t v_1 \cdot \widehat{u}_{k+1}^{(2)} &= 0
\end{aligned}$$

sowie:

$$\begin{aligned}
\partial_i F_0 \cdot \widehat{v}_{k+1}^{(2)} &= -\partial_i u_1 \cdot \widehat{u}_{k+1}^{(2)} \quad \text{für } 2 \leq i \leq n \\
\left( \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \right) \cdot \widehat{v}_{k+1}^{(2)} &= -\left( \partial_1 u_1 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_2 \right) \cdot \widehat{u}_{k+1}^{(2)} \\
\frac{1}{\varrho^2} \partial_t^2 u_1 \cdot \widehat{v}_{k+1}^{(2)} &= \frac{h_{11}^{(2)}}{2} - \left[ \partial_1^2 F_0 + \frac{2}{\varrho} \partial_t \partial_1 u_1 + \frac{1}{\varrho} \partial_t \left( \frac{\partial_t \widehat{u}_2}{\varrho} \right) \right] \cdot \widehat{u}_{k+1}^{(2)} \\
\partial_t v_1 \cdot \widehat{v}_{k+1}^{(2)} &= 0
\end{aligned}$$

Damit erfüllt die Funktion  $u_{n+1} \in C^\infty(I \times \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}})$  mit:

$$u_{k+1} := u_{k+1}^{(1)} + u_{k+1}^{(2)} = \underbrace{\widehat{u}_{k+1}^{(1)} + \widehat{u}_{k+1}^{(2)}}_{=: \widehat{u}_{k+1}} + \epsilon \underbrace{(\widehat{v}_{k+1}^{(1)} + \widehat{v}_{k+1}^{(2)})}_{=: \widehat{v}_{k+1}}$$

wegen  $h = h^{(1)} + h^{(2)}$  das Gleichungssystem (4.71) bis (4.75), und alle weiteren geforderten Bedingungen. Es gilt  $\widehat{u}_{k+1}, \widehat{v}_{k+1} \in C^\infty(\mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  mit  $\text{supp}(\widehat{u}_{k+1}(t, \cdot)) \subseteq K$ ,  $\text{supp}(\widehat{v}_{k+1}(t, \cdot)) \subseteq K$  für alle  $t \in \mathbb{S}$ . Diese Eigenschaften übertragen sich auf die Abbildung  $u_{k+1}$ . Nun wird  $F_{k+1} \in C^\infty(I \times \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  mit:

$$F_{k+1}(\epsilon, t, x) := F_k(\epsilon, t, x) + \epsilon^{k+1} u_{k+1}(\epsilon, t, x) \tag{4.79}$$

definiert. Dann ist nach Konstruktion von  $u_{k+1}$ , zusammen mit der Induktionsvoraussetzung, die Bedingung  $\text{supp}(F_{k+1}(\epsilon, t, \cdot) - F_0(\cdot)) \subseteq K$  für alle  $(\epsilon, t) \in I \times \mathbb{S}$  erfüllt. Ferner ist die Abschätzung (4.67) erfüllt. Es wird nun gezeigt, dass die Gleichungen (4.63) bis (4.65) ebenfalls gelten. Dazu werden die Gleichungen (4.71) bis (4.75) verwendet. Vorher

sei bemerkt, dass mit (4.58) und (4.79) die Gleichung:

$$F_k(\epsilon, t, x) = F_0(x) + \epsilon u_1(t, x) + \sum_{i=3}^k \epsilon^i u_i(\epsilon, t, x) \quad (4.80)$$

für  $(\epsilon, t, x) \in I \times \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}$  gilt. Zuerst wird (4.63) gezeigt:

$$\begin{aligned}
& \left| \partial_1 F_{k+1} + \frac{1}{\epsilon \varrho} \partial_t F_{k+1} \right|_{\mathbb{R}^q}^2 \stackrel{(4.79)}{=} \left| \partial_1 F_k + \frac{1}{\epsilon \varrho} \partial_t F_k + \epsilon^{k+1} \left( \partial_1 u_{k+1} + \frac{1}{\epsilon \varrho} \partial_t u_{k+1} \right) \right|_{\mathbb{R}^q}^2 \\
&= \left| \partial_1 F_k + \frac{1}{\epsilon \varrho} \partial_t F_k \right|_{\mathbb{R}^q}^2 + 2\epsilon^{k+1} \left( \partial_1 F_k + \frac{1}{\epsilon \varrho} \partial_t F_k \right) \cdot \left( \partial_1 u_{k+1} + \frac{1}{\epsilon \varrho} \partial_t u_{k+1} \right) + \Lambda(\epsilon^{2k+2}) \\
&\stackrel{(4.68)}{=} |\partial_1 F_0|_{\mathbb{R}^q}^2 + a^4 + \epsilon^{k+1} h_{11} \\
&\quad + 2\epsilon^{k+1} \left( \partial_1 F_k + \frac{1}{\epsilon \varrho} \partial_t F_k \right) \cdot \left( \partial_1 u_{k+1} + \frac{1}{\epsilon \varrho} \partial_t u_{k+1} \right) + \Lambda(\epsilon^{k+2}) \\
&\stackrel{(4.79)}{=} |\partial_1 F_0|_{\mathbb{R}^q}^2 + a^4 + \epsilon^{k+1} h_{11} \\
&\quad + 2\epsilon^{k+1} \left( \partial_1 F_0 + \epsilon \partial_1 u_1 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 + \frac{\epsilon}{\varrho} \partial_t u_2 \right) \cdot \left( \partial_1 u_{k+1} + \frac{1}{\epsilon \varrho} \partial_t u_{k+1} \right) + \Lambda(\epsilon^{k+2}) \\
&= |\partial_1 F_0|_{\mathbb{R}^q}^2 + a^4 + \epsilon^{k+1} h_{11} + \frac{2}{\varrho} \epsilon^k \left[ \left( \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \right) + \epsilon \left( \partial_1 u_1 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_2 \right) \right] \cdot \partial_t u_{k+1} \\
&\quad + 2\epsilon^{k+1} \left( \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \right) \cdot \partial_1 u_{k+1} + \Lambda(\epsilon^{k+2}) \\
&= |\partial_1 F_0|_{\mathbb{R}^q}^2 + a^4 + \epsilon^{k+1} h_{11} \\
&\quad + \frac{2}{\varrho} \epsilon^k \partial_t \left[ \underbrace{\left( \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \right) \cdot u_{k+1}}_{\stackrel{(4.72)}{=} -\epsilon \partial_t \left( \partial_1 u_1 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_2 \right) \cdot u_{k+1} + \Lambda(\epsilon^2)} \right] - \frac{2}{\varrho} \epsilon^k \left[ \underbrace{\partial_t \partial_1 F_0}_{=0} + \partial_t \left( \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \right) \right] \cdot u_{k+1} \\
&\quad + \frac{2}{\varrho} \epsilon^{k+1} \partial_t \left[ \left( \partial_1 u_1 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_2 \right) \cdot u_{k+1} \right] - \frac{2}{\varrho} \epsilon^{k+1} \left[ \partial_t \partial_1 u_1 + \partial_t \left( \frac{1}{\varrho} \partial_t u_2 \right) \right] \cdot u_{k+1} \\
&\quad + 2\epsilon^{k+1} \underbrace{\partial_1 \left[ \left( \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \right) \cdot u_{k+1} \right]}_{\stackrel{(4.72)}{=} \Lambda(\epsilon)} - 2\epsilon^{k+1} \left[ \left( \partial_1^2 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t \partial_1 u_1 \right) \cdot u_{k+1} \right] + \Lambda(\epsilon^{k+2}) \\
&= |\partial_1 F_0|_{\mathbb{R}^q}^2 + a^4 + \epsilon^{k+1} h_{11} \\
&\quad - 2\epsilon^{k+1} \left[ \partial_1^2 F_0 + \frac{2}{\varrho} \partial_t \partial_1 u_1 + \frac{1}{\epsilon \varrho} \partial_t \left( \frac{\partial_t u_1 + \epsilon \partial_t u_2}{\varrho} \right) \right] \cdot u_{k+1} + \Lambda(\epsilon^{k+2}) \\
&\stackrel{(4.75)}{=} |\partial_1 F_0|_{\mathbb{R}^q}^2 + a^4 + \epsilon^{k+2} f_{11}^{(k+1)}
\end{aligned}$$

Nun wird (4.64) gezeigt, es sei  $i \in \{2, \dots, n\}$ :

$$\begin{aligned}
& \left( \partial_1 F_{k+1} + \frac{1}{\epsilon \varrho} \partial_t F_{k+1} \right) \cdot \partial_i F_{k+1} \\
& \stackrel{(4.79)}{=} \left[ \partial_1 F_k + \frac{1}{\epsilon \varrho} \partial_t F_k + \epsilon^{k+1} \left( \partial_1 u_{k+1} + \frac{1}{\epsilon \varrho} \partial_t u_{k+1} \right) \right] \cdot (\partial_i F_k + \epsilon^{k+1} \partial_i u_{k+1}) \\
& = \left( \partial_1 F_k + \frac{1}{\epsilon \varrho} \partial_t F_k \right) \cdot \partial_i F_k + \epsilon^{k+1} \left( \partial_1 u_{k+1} + \frac{1}{\epsilon \varrho} \partial_t u_{k+1} \right) \cdot \partial_i F_k \\
& \quad + \epsilon^{k+1} \left( \partial_1 F_k + \frac{1}{\epsilon \varrho} \partial_t F_k \right) \cdot \partial_i u_{k+1} + \Lambda(\epsilon^{2k+2}) \\
& \stackrel{(4.69)}{=} \partial_1 F_0 \cdot \partial_i F_0 + \epsilon^{k+1} h_{1i} + \epsilon^{k+1} \left( \partial_1 u_{k+1} + \frac{1}{\epsilon \varrho} \partial_t u_{k+1} \right) \cdot \partial_i F_k \\
& \quad + \epsilon^{k+1} \left( \partial_1 F_k + \frac{1}{\epsilon \varrho} \partial_t F_k \right) \cdot \partial_i u_{k+1} + \Lambda(\epsilon^{k+2}) \\
& \stackrel{(4.79)}{=} \partial_1 F_0 \cdot \partial_i F_0 + \epsilon^{k+1} h_{1i} + \epsilon^{k+1} \partial_i F_0 \cdot \partial_1 u_{k+1} + \frac{\epsilon^k}{\varrho} (\partial_i F_0 + \epsilon \partial_i u_1) \cdot \partial_t u_{k+1} \\
& \quad + \epsilon^{k+1} \left( \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \right) \cdot \partial_i u_{k+1} + \Lambda(\epsilon^{k+2}) \\
& = \partial_1 F_0 \cdot \partial_i F_0 + \epsilon^{k+1} h_{1i} + \epsilon^{k+1} \left[ \underbrace{\partial_1 (\partial_i F_0 \cdot u_{k+1})}_{\stackrel{(4.71)}{=} \Lambda(\epsilon)} - \partial_1 \partial_i F_0 \cdot u_{k+1} \right] \\
& \quad + \frac{\epsilon^k}{\varrho} \left[ \underbrace{\partial_t (\partial_i F_0 \cdot u_{k+1})}_{\stackrel{(4.71)}{=} -\epsilon \partial_t (\partial_i u_1 \cdot u_{k+1}) + \Lambda(\epsilon^2)}} - \underbrace{\partial_t \partial_i F_0 \cdot u_{k+1}}_{=0} \right] + \frac{\epsilon^{k+1}}{\varrho} \left[ \partial_t (\partial_i u_1 \cdot u_{k+1}) - \partial_t \partial_i u_1 \cdot u_{k+1} \right] \\
& \quad + \epsilon^{k+1} \partial_i \left[ \underbrace{\left( \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t u_1 \right) \cdot u_{k+1}}_{\stackrel{(4.72)}{=} \Lambda(\epsilon)} \right] - \epsilon^{k+1} \underbrace{\left( \partial_i \partial_1 F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_i \partial_t u_1 \right) \cdot u_{k+1}}_{\stackrel{(4.74)}{=} \frac{1}{2} h_{1i} + \Lambda(\epsilon)} + \Lambda(\epsilon^{k+2}) \\
& = \partial_1 F_0 \cdot \partial_i F_0 + \frac{1}{2} \epsilon^{k+1} h_{1i} - \epsilon^{k+1} \underbrace{\left( \partial_1 \partial_i F_0 + \frac{1}{\varrho} \partial_t \partial_i u_1 \right) \cdot u_{k+1}}_{\stackrel{(4.74)}{=} \frac{1}{2} h_{1i} + \Lambda(\epsilon)} + \Lambda(\epsilon^{k+2}) \\
& = \partial_1 F_0 \cdot \partial_i F_0 + \epsilon^{k+2} f_{1i}^{(k+1)}
\end{aligned}$$

Und schließlich (4.65), es gilt für  $i, j \in \{2, \dots, n\}$  mit  $i \leq j$ :

$$\begin{aligned}
& \partial_i F_{k+1} \cdot \partial_j F_{k+1} \stackrel{(4.79)}{=} \partial_i (F_k + \epsilon^{k+1} u_{k+1}) \cdot \partial_j (F_k + \epsilon^{k+1} u_{k+1}) \\
& = \partial_i F_k \cdot \partial_j F_k + \epsilon^{k+1} \partial_i F_k \cdot \partial_j u_{k+1} + \epsilon^{k+1} \partial_j F_k \cdot \partial_i u_{k+1} + \Lambda(\epsilon^{2k+2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(4.70)}{=} \partial_i F_0 \cdot \partial_j F_0 + \epsilon^{k+1} h_{ij} + \epsilon^{k+1} \partial_i F_k \cdot \partial_j u_{k+1} + \epsilon^{k+1} \partial_j F_k \cdot \partial_i u_{k+1} + \Lambda(\epsilon^{k+2}) \\
& = \partial_i F_0 \cdot \partial_j F_0 + \epsilon^{k+1} h_{ij} + \underbrace{\epsilon^{k+1} \partial_j (\partial_i F_0 \cdot u_{k+1})}_{\stackrel{(4.71)}{=} \Lambda(\epsilon)} - \underbrace{\epsilon^{k+1} \partial_j \partial_i F_0 \cdot u_{k+1}}_{\stackrel{(4.73)}{=} \frac{h_{ij}}{2} + \Lambda(\epsilon)} \\
& \quad + \epsilon^{k+1} \underbrace{\partial_i (\partial_j F_0 \cdot u_{k+1})}_{\stackrel{(4.71)}{=} \Lambda(\epsilon)} - \underbrace{\epsilon^{k+1} \partial_i \partial_j F_0 \cdot u_{k+1}}_{\stackrel{(4.73)}{=} \frac{h_{ij}}{2} + \Lambda(\epsilon)} + \Lambda(\epsilon^{k+2}) \\
& = \partial_i F_0 \cdot \partial_j F_0 + \epsilon^{k+2} f_{ij}^{(k+1)}
\end{aligned}$$

□

Um nun den Beweis von Satz 4.1 abzuschließen wird aus der in 4.3 beschriebenen Funktion  $F_k$  wird die Funktion  $F_{\epsilon,k}$  gemäß (4.37) konstruiert. Das bedeutet  $F_{\epsilon,k}(x) := F_k(\epsilon, \beta(\epsilon^{-1}x_1), x)$ , daraus ergibt sich die in (4.1) bis (4.3) beziehungsweise (4.4) geforderte Abbildung  $f_{ij}^{\epsilon,k}$  wie folgt: für  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i \leq j$  ist:

$$f_{ij}^{\epsilon,k}(x) := f_{ij}^{(k)}(\epsilon, \beta(\epsilon^{-1}x_1), x) \quad (4.81)$$

Aus den Abschätzungen (4.43) und (4.66) ergibt sich (4.4). Zunächst folgt:

**Folgerung 4.2** *Gegeben sei eine freie Abbildung  $F_0 \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , für  $q \geq \frac{n}{2}(n+3) + 5$ , und eine Abbildung  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$ . Dann existiert eine kompakte Menge  $K \subseteq \mathbb{B}$ , mit  $\text{supp}(a) \subseteq K$ , so dass die folgende Aussage gilt: Für jedes  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , existiert für alle  $\epsilon \in (0, 1]$ , eine Abbildung  $F_{\epsilon,k} \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , welche die Eigenschaften (4.1) bis (4.4) erfüllt.*

Es bleibt zu zeigen dass für hinreichend kleine  $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ , die Abbildung  $F_{\epsilon,k}$ , genau wie  $F_0$ , eine freie Abbildung ist, womit dann Satz 4.1 bewiesen ist:

### 4.3 Perturbation einer freien Abbildung

**Lemma 4.5** *Es sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  eine kompakte Menge, und es seien  $e_1, \dots, e_k \subseteq C^0(K, \mathbb{R}^q)$  punktweise linear unabhängige Abbildungen, dann existiert ein  $\epsilon_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ , mit der folgenden Eigenschaft: sind Abbildungen  $\delta_1, \dots, \delta_k \subseteq C^0(K, \mathbb{R}^q)$  gegeben mit:*

$$\max_{1 \leq i \leq k} \max_{x \in K} |\delta_i(x)|_{\mathbb{R}^q} \leq \epsilon_0$$



dann ist, für  $x \in K$ , die Gramsche Determinante der Vektoren:

$$(w_1 + \delta_1)^T(x), \dots, (w_k + \delta_k)^T(x) \quad (4.82)$$

nach unten, gegen eine von  $x$  unabhängige Konstante, beschränkt. Insbesondere sind die Vektoren in (4.82) linear unabhängig.

Lemma 4.5 folgt direkt aus der Stetigkeit der Determinante. Lemma 4.5 soll nun auf eine, in Folgerung 4.2 beschriebene, Funktion  $F_{\epsilon,k} \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  angewandt werden, um zu zeigen, dass  $F_{\epsilon,k}$  für hinreichend kleine  $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  eine freie Abbildung ist. Dann ist mit (4.37), (4.38) und (4.39) für  $x \in \overline{\mathbb{B}}$  und  $2 \leq i \leq j \leq n$ :

$$\begin{aligned} \partial_1 F_{\epsilon,k}(x) &= \partial_1 F_k(\epsilon, \beta(\epsilon^{-1}x_1), x) + \frac{1}{\epsilon \varrho(\beta(\epsilon^{-1}x_1))} \partial_t F_k(\epsilon, \beta(\epsilon^{-1}x_1), x) \\ &\stackrel{(4.80)}{=} \partial_1 F_0(x) + \frac{1}{\varrho(\beta(\epsilon^{-1}x_1))} \partial_t u_1(\beta(\epsilon^{-1}x_1), x) + \Lambda(\epsilon) \\ \partial_i F_{\epsilon,k}(x) &= \partial_i F_k(\epsilon, \beta(\epsilon^{-1}x_1), x) \\ &\stackrel{(4.80)}{=} \partial_i F_0(x) + \Lambda(\epsilon) \\ \partial_1^2 F_{\epsilon,k}(x) &= \partial_1^2 F_k(\epsilon, \beta(\epsilon^{-1}x_1), x) + \frac{2}{\epsilon \varrho(\beta(\epsilon^{-1}x_1))} \partial_t \partial_1 F_k(\epsilon, \beta(\epsilon^{-1}x_1), x) \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon^2 \varrho(\beta(\epsilon^{-1}x_1))} \partial_t \left[ \frac{1}{\varrho(\cdot)} \partial_t F_k(\epsilon, \cdot, x) \right] \Big|_{t=\beta(\epsilon^{-1}x_1)} \\ &\stackrel{(4.80)}{=} \partial_1^2 F_0(x) + \frac{2}{\varrho(\beta(\epsilon^{-1}x_1))} \partial_t \partial_1 u_1(\beta(\epsilon^{-1}x_1), x) \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon \varrho(\beta(\epsilon^{-1}x_1))} \partial_t \left[ \frac{\partial_t u_1(\cdot, x) + \epsilon \partial_t u_2(\epsilon, \cdot, x)}{\varrho(\cdot)} \right] \Big|_{t=\beta(\epsilon^{-1}x_1)} + \Lambda(\epsilon) \\ \partial_1 \partial_i F_{\epsilon,k}(x) &= \partial_1 \partial_i F_0(x) + \frac{1}{\varrho(\beta(\epsilon^{-1}x_1))} \partial_t \partial_i u_1(\beta(\epsilon^{-1}x_1), x) + \Lambda(\epsilon) \\ \partial_i \partial_j F_{\epsilon,k}(x) &= \partial_i \partial_j F_0(x) + \Lambda(\epsilon) \end{aligned} \quad (4.83)$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der Vektoren in (4.76) und (4.78) folgt, für hinreichend kleine  $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  und alle  $x \in \overline{\mathbb{B}}$ , die lineare Unabhängigkeit der Vektoren in (4.83). Um dies einzusehen, kann eine Fallunterscheidung wie in (4.77) durchgeführt werden.

Damit ist gezeigt, dass ein  $\epsilon_k \in \mathbb{R}_{>0}$  existiert, so dass die Abbildung  $F_{\epsilon,k} \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  in Folgerung 4.2, für  $\epsilon \in (0, \epsilon_k]$ , eine freie Abbildung ist, womit Satz 4.1 vollständig bewiesen ist.

Für den Beweis von Hauptsatz 1.1 in Kapitel 6, wird noch gezeigt, dass  $F_{\epsilon,k}$  für hinreichend kleine  $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  injektiv ist, sofern  $F_0$  injektiv ist. Dafür wird eine topologische

Hilfsgröße, die sogenannte **Lebesgue-Zahl**, eingeführt. Der folgende Sachverhalt wird in [Mun00, Lemma 27.5] bewiesen, dabei wird, für eine Teilmenge  $S$  eines metrischen Raumes  $(M, d)$ , der Ausdruck  $\text{diam}(S) := \sup\{d(x, y) : x, y \in S\} \in [0, \infty]$  als der **Durchmesser** von  $S$  bezeichnet.

**Lemma 4.6** *Es sei  $\mathcal{X}$  eine offene Überdeckung eines kompakten metrischen Raumes  $(M, d)$ . Dann existiert ein  $\delta_L > 0$  mit der folgenden Eigenschaft: Ist  $S \subseteq M$  eine Menge mit  $\text{diam}(S) < \delta_L$ , dann existiert ein  $U \in \mathcal{X}$  so dass  $S \subseteq U$ .*

Um Missverständnisse zu vermeiden, sei darauf hingewiesen, dass sich die Bezeichnung Lebesgue-Zahl, auf das  $\delta_L$  bezieht. Diese Zahl ist nicht eindeutig bestimmt, und ist immer von der vorliegenden offenen Überdeckung abhängig.

**Lemma 4.7** *Ist die freie Abbildung  $F_0 \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  für  $q \geq \frac{n}{2}(n+3) + 5$  injektiv, dann existiert ein  $\epsilon_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass für alle  $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]$  und alle  $(t_1, x), (t_2, y) \in \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}$ , mit  $x \neq y$  für die, in Lemma 4.3 konstruierte, Abbildung  $u_1 \in C^\infty(\mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  die Bedingung:*

$$F_0(x) + \epsilon u_1(t_1, x) \neq F_0(y) + \epsilon u_1(t_2, y)$$

gilt.

*Beweis.* Es ist  $u_1 = a^2 v_1$ , und mit (4.29) ist  $v_1(t, x) = \alpha_1(t) u(x) + \alpha_2(t) v(x)$ , mit den, in Lemma 4.1 konstruierten, Abbildungen  $u, v \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ . Wenn  $u \equiv 0 \equiv v$  gilt, so ist nichts zu zeigen. Es sei also mindestens eine der beiden Funktionen  $u$  und  $v$  nicht identisch 0. Zunächst wird gezeigt, dass für ein hinreichend kleines  $\hat{\epsilon} \in \mathbb{R}_{>0}$  die Abbildung  $\Phi_{\hat{\epsilon}} \in C^\infty([-\hat{\epsilon}, \hat{\epsilon}]^2 \times \overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  mit:

$$\Phi_{\hat{\epsilon}}(\alpha, \beta, x) := F_0(x) + \alpha u(x) + \beta v(x) \quad (4.84)$$

injektiv ist. Mit dem Fortsetzungssatz von Seeley [See64] werden Abbildungen  $\hat{F}_0, \hat{u}, \hat{v} \in C^\infty(B_{1+\epsilon}(0), \mathbb{R}^q)$  gewählt, welche die jeweiligen Abbildungen, über den Rand der Menge  $\overline{\mathbb{B}}$  hinaus, fortsetzen. Dann wird eine Abbildung  $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times B_{1+\epsilon}(0), \mathbb{R}^q)$  wie folgt definiert:

$$\Phi(\alpha, \beta, x) := \hat{F}_0(x) + \alpha \hat{u}(x) + \beta \hat{v}(x) \quad (4.85)$$

Dann ist für jedes  $x \in \overline{\mathbb{B}}$ :

$$D\Phi(0, 0, x) = (u(x), v(x), DF_0(x)) \in \mathbb{R}^{q \times n+2}$$

Nach Wahl von  $u$  und  $v$  im Beweis von Lemma 4.3, folgt unmittelbar  $rg(D\Phi(0, 0, x)) = n + 2$  für alle  $x \in \overline{\mathbb{B}}$ . Dann existiert, mit [Lee03, Theorem 7.8], ein  $\epsilon_x > 0$  und eine, in  $B_{1+\epsilon}(0)$  offene Umgebung  $U_x$ , von  $x$ , so dass die Abbildung  $\Phi_x := \Phi|_{(-\epsilon_x, \epsilon_x)^2 \times U_x} \in C^\infty([-\epsilon_x, \epsilon_x]^2 \times \overline{U}_x, \mathbb{R}^q)$  injektiv ist. Unter Verwendung der Kompaktheit der Menge  $\overline{\mathbb{B}}$ , werden nun endlich viele, in  $B_{1+\epsilon}(0)$  offene Mengen  $U_1, \dots, U_m \subseteq B_{1+\epsilon}(0)$  und  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m \in \mathbb{R}_{>0}$  gewählt, so dass:

$$\overline{\mathbb{B}} \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_i$$

und für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$  die Abbildung  $\Phi_i := \Phi|_{(-\epsilon_i, \epsilon_i)^2 \times U_i} \in C^\infty([-\epsilon_i, \epsilon_i]^2 \times \overline{U}_i)$  injektiv ist. Nun wird, für jedes  $i \in \{1, \dots, m\}$ , die Menge  $V_i := U_i \cap \overline{\mathbb{B}}$  so definiert, dass das Mengensystem  $\mathcal{X} := \{V_i\}_{1 \leq i \leq m} \subseteq \mathcal{P}(\overline{\mathbb{B}})$  eine offene Überdeckung der Menge  $\overline{\mathbb{B}}$  bildet. Es sei  $\delta_L \in \mathbb{R}_{>0}$  eine Lebesgue-Zahl zur Überdeckung  $\mathcal{X}$ , und definiere nun die in  $\overline{\mathbb{B}} \times \overline{\mathbb{B}}$  offene Menge:

$$\Delta^{\delta_L} := \{(x, y) \in \overline{\mathbb{B}} \times \overline{\mathbb{B}} : |x - y| < \delta_L\} \quad (4.86)$$

Ist  $(x, y) \in \Delta^{\delta_L}$ , dann existiert ein  $i \in \{1, \dots, m\}$ , so dass  $\{x, y\} \subseteq V_i \subseteq U_i$  gilt. Ist dann  $x \neq y$ , und sind  $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \in (-\epsilon_i, \epsilon_i)^2$ , dann ist  $\Phi(\alpha_1, \beta_1, x) \neq \Phi(\alpha_2, \beta_2, y)$ . Nun sei  $(x, y) \in \overline{\mathbb{B}} \times \overline{\mathbb{B}}$ , so dass  $(x, y) \notin \Delta^{\delta_L}$ . Unter Verwendung der Injektivität von  $F_0$ , und der Kompaktheit von  $\overline{\mathbb{B}} \times \overline{\mathbb{B}} \setminus \Delta^{\delta_L}$ , seien nun  $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$ , so dass:

$$|\alpha_1| + |\beta_1| + |\alpha_2| + |\beta_2| < \frac{\min_{(x,y) \in \overline{\mathbb{B}} \times \overline{\mathbb{B}} \setminus \Delta^{\delta_L}} |F_0(x) - F_0(y)|_{\mathbb{R}^q}}{\max_{x \in \overline{\mathbb{B}}} |u(x)|_{\mathbb{R}^q} + \max_{x \in \overline{\mathbb{B}}} |v(x)|_{\mathbb{R}^q}} \quad (4.87)$$

dann ist:

$$\begin{aligned} & |\Phi(\alpha_1, \beta_1, x) - \Phi(\alpha_2, \beta_2, y)|_{\mathbb{R}^q} \\ & \stackrel{(4.85)}{=} |F_0(x) + \alpha_1 u(x) + \beta_1 v(x) - F_0(y) - \alpha_2 u(y) - \beta_2 v(y)|_{\mathbb{R}^q} \\ & \geq |F_0(x) - F_0(y)|_{\mathbb{R}^q} - |\alpha_1 u(x)|_{\mathbb{R}^q} - |\beta_1 v(x)|_{\mathbb{R}^q} - |\alpha_2 u(y)|_{\mathbb{R}^q} - |\beta_2 v(y)|_{\mathbb{R}^q} \\ & \geq \min_{(x,y) \in \overline{\mathbb{B}} \times \overline{\mathbb{B}} \setminus \Delta^{\delta_L}} |F_0(x) - F_0(y)|_{\mathbb{R}^q} \\ & \quad - (|\alpha_1| + |\alpha_2|) \cdot \max_{x \in \overline{\mathbb{B}}} |u(x)|_{\mathbb{R}^q} - (|\beta_1| + |\beta_2|) \cdot \max_{x \in \overline{\mathbb{B}}} |v(x)|_{\mathbb{R}^q} \\ & \geq \min_{(x,y) \in \overline{\mathbb{B}} \times \overline{\mathbb{B}} \setminus \Delta^{\delta_L}} |F_0(x) - F_0(y)|_{\mathbb{R}^q} \\ & \quad - (|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\beta_1| + |\beta_2|) \cdot \left( \max_{x \in \overline{\mathbb{B}}} |u(x)|_{\mathbb{R}^q} + \max_{x \in \overline{\mathbb{B}}} |v(x)|_{\mathbb{R}^q} \right) \stackrel{(4.87)}{>} 0 \end{aligned}$$

Die Abbildung  $\Phi_{\hat{\epsilon}}$  in (4.84) ist demnach injektiv, falls:

$$\hat{\epsilon} < \frac{1}{2} \cdot \min \left\{ \{\epsilon_i\}_{1 \leq i \leq m} \cup \left\{ \frac{1}{4} \frac{\min_{(x,y) \in \mathbb{B} \times \mathbb{B} \setminus \Delta^{\delta_L}} |F_0(x) - F_0(y)|_{\mathbb{R}^q}}{\max_{x \in \mathbb{B}} |u(x)|_{\mathbb{R}^q} + \max_{x \in \mathbb{B}} |v(x)|_{\mathbb{R}^q}} \right\} \right\}$$

Es sei nun  $a \neq 0$ , da sonst, wegen  $u_1 = a^2 v_1$ , nichts zu zeigen wäre. Ist:

$$\epsilon_0 < \frac{\hat{\epsilon}}{\max_{x \in \mathbb{B}} a^2(x)} \cdot \min \left\{ \frac{1}{\max_{t \in \mathbb{S}} |\alpha_1(t)|}, \frac{1}{\max_{t \in \mathbb{S}} |\alpha_2(t)|} \right\}$$

erfüllt, dann ist für  $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]$  und  $(t_1, x) \in \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}$  sowie  $(t_2, y) \in \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}$  mit  $x \neq y$ :

$$F_0(x) + \epsilon u_1(t_1, x) = F_0(x) + \underbrace{\epsilon a^2(x) \alpha_1(t_1)}_{\in (-\hat{\epsilon}, \hat{\epsilon})} u(x) + \underbrace{\epsilon a^2(x) \alpha_2(t_1)}_{\in (-\hat{\epsilon}, \hat{\epsilon})} v(x)$$

und

$$F_0(y) + \epsilon u_1(t_2, y) = F_0(y) + \underbrace{\epsilon a^2(y) \alpha_1(t_2)}_{\in (-\hat{\epsilon}, \hat{\epsilon})} u(y) + \underbrace{\epsilon a^2(y) \alpha_2(t_2)}_{\in (-\hat{\epsilon}, \hat{\epsilon})} v(y)$$

somit folgt aus der Injektivität der Abbildung  $\Phi_{\hat{\epsilon}}$ , dass:

$$F_0(x) + \epsilon u_1(t_1, x) \neq F_0(y) + \epsilon u_1(t_2, y)$$

erfüllt ist. □

Die Ausführungen in diesem Abschnitt bilden die Grundlage für den folgenden Satz. Dieser Satz entspricht [Gün89b, Lemma 4.3.].

**Satz 4.4** *Es sei  $F_0 \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , für  $q \geq \frac{n}{2}(n+3) + 5$ , eine freie Abbildung. Dann existiert für jedes  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  ein  $\epsilon_k \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass für jedes  $u \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  mit:*

$$\|u\|_{C^2(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} < \epsilon_k$$

*für alle  $\epsilon \in (0, \epsilon_k]$  die folgenden Aussagen gelten:*

- (i) *Die Abbildung  $F_{\epsilon,k} + u$  ist eine freie Abbildung, und für jedes  $x \in \overline{\mathbb{B}}$  ist die Gramsche Determinante der Vektoren:*

$$\partial_i(F_{\epsilon,k} + u)(x) \quad 1 \leq i \leq n \quad \partial_i \partial_j(F_{\epsilon,k} + u)(x) \quad 1 \leq i \leq j \leq n$$

nach unten gegen eine, von  $\epsilon, x$  und  $u$  unabhängige, Konstante beschränkt.

(ii) Ist die Abbildung  $F_0$  injektiv, so ist die Abbildung  $F_{\epsilon,k} + u$  auch injektiv.

*Beweis.* Die Aussage (i) folgt aus den Gleichungen (4.83) und den sich daran anschließenden Bemerkungen, sowie Lemma 4.5. Nun wird (ii) gezeigt. Nach Konstruktion von  $F_{\epsilon,k}$  existiert zu jedem  $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$  ein  $\eta(\gamma) \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass für alle  $\epsilon < \eta$  die Aussage:

$$\|F_0(\cdot) + \epsilon u_1(\beta(\epsilon^{-1} p r_1(\cdot)), \cdot) - F_{\epsilon,k}(\cdot)\|_{C^1(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} < \gamma$$

erfüllt ist. Zusammen mit Lemma 4.7 folgt die Behauptung. □

## 5 Lösung des lokalen Perturbationsproblems

Gegeben seien offene Mengen  $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{B}$  mit  $\overline{U}_1 \subseteq U_2$  und  $\overline{U}_2 \subseteq \mathbb{B}$ , eine freie Abbildung  $F_0 \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , sowie ein  $f \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$  mit der Eigenschaft  $\text{supp}(f) \subseteq U_1$ . In diesem Kapitel wird die folgende Fragestellung untersucht: Unter welchen Voraussetzungen an  $f$  existiert ein  $u \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  mit  $\text{supp}(u) \subseteq U_2$ , so dass für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i \leq j$  die Gleichung:

$$\partial_i(F_0 + u) \cdot \partial_j(F_0 + u) = \partial_i F_0 \cdot \partial_j F_0 + f_{ij}$$

erfüllt ist? Es wird gezeigt, dass ein solches  $u$  immer existiert, sofern  $f$  im  $C^{2,\alpha}$ -Sinne klein genug ist. Die, in diesem Kapitel vorgestellte, Methode basiert auf [Gün89b, Kapitel 5.]. Im gesamten Kapitel sei  $\alpha \in (0, 1)$  fest gewählt.

### 5.1 Definition verschiedener Hilfsoperatoren

Zunächst wird, für ein  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$  und  $i \in \{1, \dots, n\}$ , der Operator:

$$\begin{aligned} N_i : C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q) &\longrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}) \\ N_i[a](v) &:= 2\partial_i a \Delta v \cdot v + a \Delta v \cdot \partial_i v \end{aligned} \tag{5.1}$$

betrachtet. Mit  $\Delta^{-1}N_i[a](v)$  wird die, nach [GT01, Corollary 4.14] eindeutig bestimmte, Lösung  $w_i \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$  der Poisson-Gleichung mit trivialer Dirichlet-Randbedingung:

$$\begin{cases} \Delta w_i = N_i[a](v) & \text{auf } \mathbb{B} \\ w_i = 0 & \text{auf } \partial\mathbb{B} \end{cases} \tag{5.2}$$

bezeichnet. Für  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$  und  $v \in C^{3,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  werden, für  $1 \leq i \leq j \leq n$ , die

---

Funktionen:

$$\begin{aligned} u_{ij}^{(1)}[a](v) &:= a\partial_i\Delta^{-1}N_j[a](v) + a\partial_j\Delta^{-1}N_i[a](v) + 3\partial_i a\Delta^{-1}N_j[a](v) + 3\partial_j a\Delta^{-1}N_i[a](v) \\ u_{ij}^{(2)}[a](v) &:= 4\partial_i a\partial_j a v \cdot v + 2a\partial_i a\partial_j v \cdot v + 2a\partial_j a\partial_i v \cdot v + a^2\partial_i v \cdot \partial_j v \end{aligned} \quad (5.3)$$

definiert. Dann gilt, für  $l \in \{1, 2\}$ ,  $u_{ij}^{(l)}[a](v) \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ . In den folgenden beiden Lemmata wird  $\Delta u_{ij}^{(l)}[a](v)$  für  $l \in \{1, 2\}$  formal berechnet.

**Lemma 5.1** *Es sei  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$  und  $1 \leq i \leq j \leq n$ . Dann existiert ein Operator:*

$$L_{ij}[a] : C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q) \longrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$$

der Form:

$$\begin{aligned} L_{ij}[a](v) &= \sum_{\substack{s_1, s_2 \in \mathbb{N}^n \\ |s_1| + |s_2| = 3, |s_2| \leq 2}} \lambda(s_1, s_2) \cdot \partial^{s_1} a \cdot \partial^{s_2} (\Delta^{-1} N_i[a](v)) \\ &+ \sum_{\substack{s_1, s_2 \in \mathbb{N}^n \\ |s_1| + |s_2| = 3, |s_2| \leq 2}} \mu(s_1, s_2) \cdot \partial^{s_1} a \cdot \partial^{s_2} (\Delta^{-1} N_j[a](v)) \end{aligned}$$

mit  $\lambda(s_1, s_2), \mu(s_1, s_2) \in \mathbb{R}$  für alle  $s_1, s_2 \in \mathbb{N}^n$ , mit  $|s_1| + |s_2| = 3$  und  $|s_2| \leq 2$ , so dass für jedes  $v \in C^{3,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  die Gleichung:

$$\Delta u_{ij}^{(1)}[a](v) = a\partial_i N_j[a](v) + a\partial_j N_i[a](v) - L_{ij}[a](v)$$

erfüllt ist.

*Beweis.* Es gilt für  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ :

$$\begin{aligned} \Delta(a\partial_i\Delta^{-1}N_j[a](v)) &= \Delta a\partial_i\Delta^{-1}N_j[a](v) + 2\nabla a \cdot \nabla\partial_i\Delta^{-1}N_j[a](v) + a\partial_i N_j[a](v) \\ \Delta(\partial_i a\Delta^{-1}N_j[a](v)) &= \Delta\partial_i a\Delta^{-1}N_j[a](v) + 2\nabla\partial_i a \cdot \nabla\Delta^{-1}N_j[a](v) + \partial_i a N_j[a](v) \end{aligned}$$

Aus (5.3) folgt die Behauptung. □

**Lemma 5.2** *Es sei  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$  und  $1 \leq i \leq j \leq n$ . Dann existiert ein Operator:*

$$R_{ij}[a] : C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q) \longrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$$

der Form:

$$R_{ij}[a](v) = \sum_{\substack{s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathbb{N}^n \\ |s_1|+|s_2|+|s_3|+|s_4|=4, |s_3|, |s_4| \leq 2}} C(s_1, s_2, s_3, s_4) \cdot \partial^{s_1} a \partial^{s_2} a \partial^{s_3} v \cdot \partial^{s_4} v$$

mit  $C(s_1, s_2, s_3, s_4) \in \mathbb{R}$  für alle  $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathbb{N}^n$ , mit  $\sum_{l=1}^4 |s_l| = 4$  und  $|s_3|, |s_4| \leq 2$ , so dass für jedes  $v \in C^{3,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  die Gleichung:

$$\Delta u_{ij}^{(2)}[a](v) = a \partial_i N_j[a](v) + a \partial_j N_i[a](v) + R_{ij}[a](v)$$

erfüllt ist.

*Beweis.* Es wird zunächst bemerkt, dass mit (5.1) für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  die Gleichung:

$$\begin{aligned} a \partial_i N_j[a](v) &= 2a \partial_j a \partial_i \Delta v \cdot v + a^2 \partial_i \Delta v \cdot \partial_j v \\ &+ \sum_{\substack{s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathbb{N}^n \\ |s_1|+|s_2|+|s_3|+|s_4|=4, |s_3|, |s_4| \leq 2}} C_1(s_1, s_2, s_3, s_4) \cdot \partial^{s_1} a \partial^{s_2} a \partial^{s_3} v \cdot \partial^{s_4} v \end{aligned} \quad (5.4)$$

gilt. Nun wird der Laplace-Operator auf die einzelnen Summanden von  $u_{ij}^{(2)}$  angewandt, siehe hierfür auch (5.3):

$$\begin{aligned} \Delta(\partial_i a \partial_j a v \cdot v) &= \Delta(\partial_i a \partial_j a) v \cdot v + 2 \nabla(\partial_i a \partial_j a) \cdot \nabla(v \cdot v) + \partial_i a \partial_j a \Delta(v \cdot v) \\ &= \sum_{\substack{s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathbb{N}^n \\ |s_1|+|s_2|+|s_3|+|s_4|=4, |s_3|, |s_4| \leq 2}} C_2(s_1, s_2, s_3, s_4) \cdot \partial^{s_1} a \partial^{s_2} a \cdot \partial^{s_3} v \partial^{s_4} v \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \Delta(2a \partial_i a \partial_j v \cdot v) &= \Delta[a \partial_i a \partial_j(v \cdot v)] \\ &= \Delta(a \partial_i a) \partial_j(v \cdot v) + 2 \nabla(a \partial_i a) \cdot \nabla \partial_j(v \cdot v) + a \partial_i a \partial_j \Delta(v \cdot v) \\ &= 2a \partial_i a \partial_j \Delta v \cdot v + \sum_{\substack{s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathbb{N}^n \\ |s_1|+|s_2|+|s_3|+|s_4|=4, |s_3|, |s_4| \leq 2}} C_3(s_1, s_2, s_3, s_4) \cdot \partial^{s_1} a \partial^{s_2} a \partial^{s_3} v \cdot \partial^{s_4} v \end{aligned} \quad (5.6)$$



und schließlich:

$$\begin{aligned}
\Delta(a^2 \partial_i v \cdot \partial_j v) &= \Delta(a^2) \partial_i v \cdot \partial_j v + 2 \nabla(a^2) \cdot \nabla(\partial_i v \cdot \partial_j v) + a^2 \Delta(\partial_i v \cdot \partial_j v) \\
&= a^2 \partial_i \Delta v \cdot \partial_j v + a^2 \partial_j \Delta v \cdot \partial_i v \\
&+ \sum_{\substack{s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathbb{N}^n \\ |s_1| + |s_2| + |s_3| + |s_4| = 4, |s_3|, |s_4| \leq 2}} C_4(s_1, s_2, s_3, s_4) \cdot \partial^{s_1} a \partial^{s_2} a \partial^{s_3} v \cdot \partial^{s_4} v
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Aus (5.5), (5.6) und (5.7) folgt:

$$\begin{aligned}
\Delta u_{ij}^{(2)}[a](v) &\stackrel{(5.3)}{=} 4\Delta(\partial_i a \partial_j a v \cdot v) + \Delta(2a \partial_i a \partial_j v \cdot v) + \Delta(2a \partial_j a \partial_i v \cdot v) + \Delta(a^2 \partial_i v \cdot \partial_j v) \\
&= 2a \partial_i a \partial_j \Delta v \cdot v + 2a \partial_j a \partial_i \Delta v \cdot v + a^2 \partial_i \Delta v \cdot \partial_j v + a^2 \partial_j \Delta v \cdot \partial_i v \\
&+ \sum_{\substack{s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathbb{N}^n \\ |s_1| + |s_2| + |s_3| + |s_4| = 4, |s_3|, |s_4| \leq 2}} C(s_1, s_2, s_3, s_4) \cdot \partial^{s_1} a \partial^{s_2} a \partial^{s_3} v \cdot \partial^{s_4} v \\
&\stackrel{(5.4)}{=} a \partial_i N_j[a](v) + a \partial_j N_i[a](v) + R_{ij}[a](v)
\end{aligned}$$

□

Für  $1 \leq i \leq j \leq n$  sei nun:

$$u_{ij}[a](v) := u_{ij}^{(2)}[a](v) - u_{ij}^{(1)}[a](v) \tag{5.8}$$

dann ist mit Lemma 5.1 und Lemma 5.2, für  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$  und  $v \in C^{3,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , die Poisson-Gleichung mit trivialer Dirichlet-Randbedingung:

$$\begin{cases} \Delta u_{ij}[a](v) = M_{ij}[a](v) & \text{auf } \mathbb{B} \\ u_{ij}[a](v) = 0 & \text{auf } \partial \mathbb{B} \end{cases} \tag{5.9}$$

für den Operator:

$$\begin{aligned}
M_{ij} : C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q) &\longrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}) \\
M_{ij}[a](v) &:= L_{ij}[a](v) + R_{ij}[a](v)
\end{aligned} \tag{5.10}$$

erfüllt. Für  $1 \leq i \leq j \leq n$  wird der Ausdruck:

$$\Delta^{-1} M_{ij}[a](v) := u_{ij}[a](v) \tag{5.11}$$

definiert. Das folgende Lemma beinhaltet die zentrale Idee für die Lösung des Perturba-

tionsproblems, unter Verwendung der Operatoren  $N_i$  und  $M_{ij}$ :

**Lemma 5.3** *Gegeben seien Funktionen  $F_0 \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ ,  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$ ,  $v \in C^{3,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  und  $f \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$ , so dass in  $\mathbb{B}$  die folgenden Gleichungen erfüllt sind:*

$$\partial_i F_0 \cdot v = -a \Delta^{-1} N_i[a](v) \quad \text{für } 1 \leq i \leq n \quad (5.12)$$

$$\partial_i \partial_j F_0 \cdot v = -\frac{1}{2} f_{ij} + \frac{1}{2} \Delta^{-1} M_{ij}[a](v) \quad \text{für } 1 \leq i \leq j \leq n \quad (5.13)$$

Dann gilt für die Funktion  $F := F_0 + a^2 v$  in  $\mathbb{B}$ , für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i \leq j$ , die Gleichung:

$$\partial_i F \cdot \partial_j F = \partial_i F_0 \cdot \partial_j F_0 + a^2 f_{ij} \quad (5.14)$$

*Beweis.* Mit (5.13) ist für  $1 \leq i \leq j \leq n$ :

$$2a^2 \partial_i \partial_j F_0 \cdot v + a^2 f_{ij} = a^2 \Delta^{-1} M_{ij}[a](v) \stackrel{(5.11)}{=} a^2 u_{ij}[a](v) \stackrel{(5.8)}{=} a^2 [u_{ij}^{(2)}[a](v) - u_{ij}^{(1)}[a](v)] \quad (5.15)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} & a^2 u_{ij}^{(1)}[a](v) \\ & \stackrel{(5.3)}{=} a^2 [a \partial_i \Delta^{-1} N_j[a](v) + a \partial_j \Delta^{-1} N_i[a](v) + 3 \partial_i a \Delta^{-1} N_j[a](v) + 3 \partial_j a \Delta^{-1} N_i[a](v)] \\ & = a^2 \partial_i (a \Delta^{-1} N_j[a](v)) + a^2 \partial_j (a \Delta^{-1} N_i[a](v)) \\ & \quad + 2a^2 \partial_i a \Delta^{-1} N_j[a](v) + 2a^2 \partial_j a \Delta^{-1} N_i[a](v) \\ & \stackrel{(5.12)}{=} -a^2 \partial_i (\partial_j F_0 \cdot v) - a^2 \partial_j (\partial_i F_0 \cdot v) - 2a \partial_i a \partial_j F_0 \cdot v - 2a \partial_j a \partial_i F_0 \cdot v \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} a^2 u_{ij}^{(2)}[a](v) & \stackrel{(5.3)}{=} a^2 [4 \partial_i a \partial_j a v \cdot v + 2a \partial_i a \partial_j v \cdot v + 2a \partial_j a \partial_i v \cdot v + a^2 \partial_i v \cdot \partial_j v] \\ & = \partial_i (a^2 v) \cdot \partial_j (a^2 v) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit (5.15) die Gleichung:

$$\begin{aligned} 2a^2 \partial_i \partial_j F_0 \cdot v + a^2 f_{ij} & = \partial_i (a^2 v) \cdot \partial_j (a^2 v) + a^2 \partial_i (\partial_j F_0 \cdot v) + a^2 \partial_j (\partial_i F_0 \cdot v) \\ & \quad + 2a \partial_i a \partial_j F_0 \cdot v + 2a \partial_j a \partial_i F_0 \cdot v \end{aligned}$$

Anwendung der Produktregel auf den dritten und vierten Summanden auf der rechten

Seite, und anschließende Subtraktion des Terms  $2a^2\partial_i\partial_jF_0 \cdot v$  auf beiden Seiten ergibt:

$$\begin{aligned} a^2f_{ij} &= \partial_i(a^2v) \cdot \partial_j(a^2v) + a^2\partial_jF_0 \cdot \partial_iv + a^2\partial_iF_0 \cdot \partial_jv + 2a\partial_ia\partial_jF_0 \cdot v + 2a\partial_ja\partial_iF_0 \cdot v \\ &= \partial_i(F_0 + a^2v) \cdot \partial_j(F_0 + a^2v) - \partial_iF_0 \cdot \partial_jF_0 = \partial_iF \cdot \partial_jF - \partial_iF_0 \cdot \partial_jF_0 \end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

## 5.2 Formulierung des Fixpunktproblems

Um das lokale Perturbationsproblem zu lösen, wird untersucht, ob sich das, in Lemma 5.3 aufgestellte Gleichungssystem, für eine gegebene freie Abbildung  $F_0 \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , lösen lässt. Dafür soll dieses Gleichungssystem durch die Einführung geeigneter Operatoren als Fixpunktgleichung umgeschrieben werden:

Mit  $A[F_0] \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+3) \times q})$  wird die matrixwertige Funktion bezeichnet, deren ersten  $n$  Zeilen aus den Funktionen  $\partial_iF_0^\top$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$ , und deren restlichen Zeilen, in lexikografischer Reihenfolge, aus den Funktionen  $\partial_i\partial_jF_0^\top$ , für  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i \leq j$ , bestehen. Für geordnete Mengen von Funktionen  $\{h_i\}_{1 \leq i \leq n} \subseteq C(\overline{\mathbb{B}})$  und  $\{f_{ij}\}_{1 \leq i \leq j \leq n} \subseteq C(\overline{\mathbb{B}})$ , werden mit  $h \in C(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n)$  und  $f \in C(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$  die spaltenvektorwertigen Funktionen mit den entsprechenden Komponentenfunktionen bezeichnet, auch hier wird für die Zweifach-Indizierung die lexikografische Reihenfolge verwendet. Mit der Cramerschen Regel ist die Abbildung:

$$\begin{aligned} \Theta[F_0] : \mathbb{B} &\longrightarrow \mathbb{R}^{q \times \frac{n}{2}(n+3)} \\ x &\mapsto A^\top[F_0](x) \cdot (A[F_0](x)A^\top[F_0](x))^{-1} \end{aligned} \quad (5.16)$$

genau wie  $F_0$  glatt, wobei sich jede Ableitung beliebiger Ordnung stetig bis zum Rand fortsetzen lassen. Das bedeutet  $\Theta[F_0] \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{q \times \frac{n}{2}(n+3)})$ , und der lineare Operator:

$$\begin{aligned} E[F_0] : C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n) \times C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)}) &\longrightarrow C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q) \\ E[F_0](h, f)(x) &:= \Theta[F_0](x) \cdot \begin{pmatrix} h(x) \\ f(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.17)$$

ist wohldefiniert. Aus der Definition des Operators  $\Theta[F_0]$  folgt, für alle  $x \in \mathbb{B}$ , die Gleichheit  $A[F_0](x) \cdot \Theta[F_0](x) = I$ , wobei  $I \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+3) \times \frac{n}{2}(n+3)}$  die Einheitsmatrix bezeichnet, siehe hierfür auch Lemma 4.4 und Folgerung 4.1. Daraus folgen, für alle  $x \in \mathbb{B}$ , nach

Definition von  $E[F_0]$ , die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \partial_i F_0(x) \cdot E[F_0](h, f)(x) &= h_i(x) \quad \text{für } 1 \leq i \leq n \\ \partial_i \partial_j F_0(x) \cdot E[F_0](h, f)(x) &= f_{ij}(x) \quad \text{für } 1 \leq i \leq j \leq n \end{aligned} \quad (5.18)$$

Werden nun die Gleichungen (5.12) und (5.13) erneut betrachtet, so liegt unter Beachtung von (5.18), für  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$  und  $m \geq 2$ , die Definition der folgenden Operatoren nahe:

$$\begin{aligned} P : C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q) &\longrightarrow C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n) \\ (P_i[a](v))_{1 \leq i \leq n} &:= (a \Delta^{-1} N_i[a](v))_{1 \leq i \leq n} \end{aligned} \quad (5.19)$$

und

$$\begin{aligned} Q : C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q) &\longrightarrow C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)}) \\ (Q_{ij}[a](v))_{1 \leq i \leq j \leq n} &:= (\Delta^{-1} M_{ij}[a](v))_{1 \leq i \leq j \leq n} \end{aligned} \quad (5.20)$$

mit den, in (5.1) und (5.10) definierten, Operatoren  $N_i$  und  $M_{ij}$ . Schließlich wird, für eine gegebene freie Abbildung  $F_0 \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  und  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$ , sowie  $f \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$ , mit  $m \geq 2$  der Operator:

$$\begin{aligned} \Phi[F_0, a, f] : C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q) &\longrightarrow C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q) \\ \Phi[F_0, a, f](v) &:= -E[F_0] \left( P[a](v), \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}Q[a](v) \right) \end{aligned} \quad (5.21)$$

eingeführt. Das Gleichungssystem in Lemma 5.3 ist, für  $v \in C^{3,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , wegen (5.18) erfüllt, falls die Fixpunktgleichung:

$$v = \Phi[F_0, a, f](v) \quad (5.22)$$

erfüllt ist. Wie zu Beginn des Kapitels erwähnt, wird  $\text{supp}(f) \subseteq U_1$  angenommen. Dann kann, mit [Lee03, Proposition 2.26], ein  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$  so gewählt werden, dass  $a|_{\overline{U}_1} = 1$  und  $\text{supp}(a) \subseteq U_2$  erfüllt sind. Damit gilt  $f \equiv a^2 f$ , und mit (5.14) ist das Problem gelöst. Es bleibt also die Frage zu klären, ob der, in (5.21) eingeführte, Operator einen Fixpunkt besitzt. Dafür werden in Abschnitt 5.4 diverse  $C^{m,\alpha}$ -Abschätzungen für die bereits eingeführten Hilfsoperatoren, bewiesen. Anhand der Definition der Operatoren  $P_i$  und  $Q_{ij}$  wird deutlich, dass dafür Abschätzungen von der Lösung der Poissonglei-

chung mit Dirichlet-Randbedingung, benötigt werden. Diese Thematik ist Gegenstand des nächsten Abschnittes.

### 5.3 Die Poissongleichung mit Dirichlet-Randbedingung

Gegeben seien Funktionen  $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$  und  $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$ . Nach [GT01, Corollary 4.14] existiert genau ein  $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$ , welches das Problem:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{auf } \mathbb{B} \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\mathbb{B} \end{cases} \quad (5.23)$$

löst. Mit [GT01, Theorem 6.6] ergibt sich, zusammen mit (A.3) und (A.5), die Abschätzung:

$$|u|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \leq C(n, \alpha) \cdot \left( |f|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + |\varphi|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \right) \quad (5.24)$$

Wegen (5.2) und (5.9) genügt es, den Fall  $\varphi \equiv 0$  zu untersuchen. Es wird gezeigt, dass sich die Regularität der rechten Seite  $f$  auf die Regularität von  $u$  überträgt. Dafür wird eine äquivalente Charakterisierung des Sobolev-Raumes  $W_0^{1,p}(\mathbb{B})$  für  $p \in [1, \infty)$  verwendet. Zunächst wird ein sogenannter **Spuroperator** eingeführt, dabei wird die Randregularität von  $\mathbb{B}$  direkt ausgenutzt. Das folgende Lemma wird in [Eva98, 5.5, Theorem 1] gezeigt. Der Funktionenraum  $L^p(\partial\mathbb{B})$  wird dabei wie in [Alt12, A 6.5 (2)] definiert.

**Lemma 5.4** *Es sei  $p \in [1, \infty)$ , dann existiert ein beschränkter linearer Operator:*

$$T : W^{1,p}(\mathbb{B}) \longrightarrow L^p(\partial\mathbb{B})$$

*mit den Eigenschaften:*

$$(i) \quad Tu = u|_{\partial\mathbb{B}} \quad \text{für alle } u \in W^{1,p}(\mathbb{B}) \cap C(\overline{\mathbb{B}})$$

(ii) *Es existiert eine Konstante  $C(n, p) \in \mathbb{R}$ , so dass für alle  $u \in W^{1,p}(\mathbb{B})$  die Abschätzung:*

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\mathbb{B})} \leq C(n, p) \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{B})}$$

*gilt.*

Der Sobolev-Raum  $W_0^{1,p}(\mathbb{B})$  wird dann wie folgt charakterisiert:

**Lemma 5.5** *Es sei  $p \in [1, \infty)$ , dann gilt für  $u \in W^{1,p}(\mathbb{B})$  die folgende Aussage:*

$$u \in W_0^{1,p}(\mathbb{B}) \iff Tu \equiv 0$$

Dieses Lemma wird in [Eva98, 5.5, Theorem 2] bewiesen.

**Lemma 5.6** *Für  $m \in \mathbb{N}$  sei  $f \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$  gegeben. Dann existiert genau ein  $u \in C^{m+2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$ , welches das Randwertproblem (5.23) für  $\varphi \equiv 0$  löst. Diese Lösung erfüllt die Abschätzung:*

$$|u|_{C^{m+2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \leq C(n, m, \alpha) \cdot |f|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \quad (5.25)$$

*Beweis.* Zu Beginn des Abschnittes wurde der Sachverhalt für  $m = 0$  und beliebige  $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$  diskutiert. Mit (A.6) gilt  $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$ . Es sei  $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$  die eindeutig bestimmte Lösung von (5.23) für  $\varphi \equiv 0$ . Um die höhere Regularität zu zeigen, wird gezeigt, dass für  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k \in [2, m+1]$ , aus  $u \in C^{k,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$  immer  $u \in C^{k+1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$  folgt. Es sei  $s \in \mathbb{N}^n$  ein Multiindex der Ordnung  $|s| = k - 1$ . Mit (5.23) gilt, wegen  $f \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$ , die Gleichung:

$$\partial^s \Delta u = \partial^s f \quad (5.26)$$

Nun sei  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{B})$  eine beliebige Testfunktion, dann folgt aus (5.26) mittels partieller Integration::

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}} \partial^s f \cdot \phi \, dx &= \int_{\mathbb{B}} \partial^s \Delta u \cdot \phi \, dx = (-1)^{|s|} \int_{\mathbb{B}} \Delta u \cdot \partial^s \phi \, dx \\ &= (-1)^{|s|+1} \int_{\mathbb{B}} \nabla u \cdot \nabla \partial^s \phi \, dx = (-1)^{|s|+1} \int_{\mathbb{B}} \nabla u \cdot \partial^s \nabla \phi \, dx \\ &= - \int_{\mathbb{B}} \partial^s \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = - \int_{\mathbb{B}} \nabla \partial^s u \cdot \nabla \phi \, dx \end{aligned} \quad (5.27)$$

Wegen  $\partial^s f \in C^0(\overline{\mathbb{B}})$  gilt  $\partial^s f \in L^2(\mathbb{B})$ , und aus  $\partial^s u \in C^1(\overline{\mathbb{B}})$  folgt  $\partial^s u \in W^{1,2}(\mathbb{B})$ . Somit ist  $\partial^s u$  die, nach [GT01, Theorem 8.3] eindeutig bestimmte, schwache Lösung des Problems:

$$\begin{cases} \Delta v = \partial^s f & \text{auf } \mathbb{B} \\ v = \partial^s u & \text{auf } \partial \mathbb{B} \end{cases} \quad (5.28)$$

Mit  $u_s \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$  wird die, nach [GT01, Theorem 4.3] eindeutig bestimmte, klassische Lösung des Problems (5.28) bezeichnet. Dann gilt mit (5.27) für alle  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{B})$ :

$$- \int_{\mathbb{B}} \nabla \partial^s u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\mathbb{B}} \partial^s f \cdot \phi \, dx = \int_{\mathbb{B}} \Delta u_s \cdot \phi \, dx = - \int_{\mathbb{B}} \nabla u_s \cdot \nabla \phi \, dx$$

beziehungsweise:

$$\int_{\mathbb{B}} \nabla(\partial^s u - u_s) \cdot \nabla \phi \, dx = 0$$

Da  $T\partial^s u = Tu_s$  für den, in Lemma 5.4 definierten, Spuroperator, ist, unter Beachtung von Lemma 5.5, die Funktion  $\partial^s u - u_s \in W_0^{1,2}(\mathbb{B})$  die schwache Lösung des Problems:

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{auf } \mathbb{B} \\ v = 0 & \text{auf } \partial\mathbb{B} \end{cases}$$

Mit [GT01, Corollary 8.2] folgt  $\partial^s u \equiv u_s$  auf  $\mathbb{B}$ . Dies impliziert  $\partial^s u \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$ , beziehungsweise, da  $s \in \mathbb{N}^n$  mit  $|s| = k - 1$  beliebig ist,  $u \in C^{k+1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$ . Damit ist die Existenz und die Eindeutigkeit gezeigt. Die Abschätzung (5.25) kann induktiv, unter Verwendung von [GT01, Theorem 6.6], gezeigt werden, hierfür sei auch auf den Beweis des folgenden Lemmas verwiesen.

□

Falls  $\text{supp}(f) \subseteq \mathbb{B}$  gilt, dann kann die Abschätzung (5.25) verschärft werden:

**Lemma 5.7** Für  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  sei  $f \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$  mit  $\text{supp}(f) \subseteq B_R(0)$ , für ein  $R \in (0, 1)$  gegeben. Dann gilt für die eindeutig bestimmte Lösung  $u \in C^{m+2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$  von (5.23) mit  $\varphi \equiv 0$  die Abschätzung:

$$|u|_{C^{m+2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \leq K(n, \alpha, R) \cdot |f|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + C(n, m, \alpha, R) \cdot |f|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \quad (5.29)$$

*Beweis.* Für ein geeignetes  $\epsilon \in (0, 1 - R)$  sei  $U_0 := B_{R+\epsilon}(0) \subseteq \mathbb{B}$ , sowie  $U_1, \dots, U_k \subseteq \overline{\mathbb{B}}$  relativ offene Mengen, so dass  $\partial\mathbb{B} \subseteq \bigcup_{j=1}^k U_j$ , und  $U_j \cap \text{supp}(f) = \emptyset$  sowie  $U_j \cap \partial\mathbb{B} \neq \emptyset$  für alle  $j \in \{1, \dots, k\}$  gilt. Mit [Lee03, Theorem 2.25] existieren  $\psi_0, \dots, \psi_k \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}})$ , so dass  $\text{supp}(\psi_j) \subseteq U_j$  für alle  $j \in \{0, \dots, k\}$  und  $\sum_{j=0}^k \psi_j \equiv 1$  gilt. Dann muss  $\psi_0|_{\text{supp}(f)} \equiv 1$  gelten, woraus direkt  $f \equiv \psi_0 f$  folgt. Nun werde angenommen, für ein  $l \in \{2, \dots, m+1\}$  gelte die Abschätzung:

$$|u|_{C^{l,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \leq K(n, \alpha, R) \cdot |f|_{C^{l-2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + C(n, l, \alpha, R) \cdot |f|_{C^{l-3,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \quad (5.30)$$

Dann wird für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $j \in \{0, \dots, k\}$  die Abbildung  $v_i^j \in C^{l-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$  mit  $v_i^j := \partial_i(\psi_j u)$  definiert. Mit (A.10) gilt:

$$|u|_{C^{l+1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \leq C(n, \alpha) \cdot |u|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + \sum_{i=1}^n |\partial_i u|_{C^{l,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C(n, \alpha) \cdot |u|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k |\partial_i(\psi_j u)|_{C^{l,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
&= C(n, \alpha) \cdot |u|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k |v_i^j|_{C^{l,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \tag{5.31}
\end{aligned}$$

Für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $j \in \{0, \dots, k\}$  gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta v_i^j &= \Delta(\partial_i(\psi_j u)) = \Delta(\partial_i \psi_j u + \psi_j \partial_i u) \\
&= \Delta \partial_i \psi_j u + 2\nabla \partial_i \psi_j \cdot \nabla u + \partial_i \psi_j \Delta u + \Delta \psi_j \partial_i u + 2\nabla \psi_j \cdot \nabla \partial_i u + \psi_j \Delta \partial_i u \tag{5.32} \\
&\stackrel{(5.23)}{=} \Delta \partial_i \psi_j u + 2\nabla \partial_i \psi_j \cdot \nabla u + \partial_i \psi_j f + \Delta \psi_j \partial_i u + 2\nabla \psi_j \cdot \nabla \partial_i u + \psi_j \partial_i f
\end{aligned}$$

Für  $j = 0$  folgt aus (5.32):

$$\Delta v_i^0 = \Delta \partial_i \psi_0 u + 2\nabla \partial_i \psi_0 \cdot \nabla u + \partial_i \psi_0 f + \Delta \psi_0 \partial_i u + 2\nabla \psi_0 \cdot \nabla \partial_i u + \partial_i f$$

Mit (5.30) ergibt daraus, unter Beachtung von (A.8) und (A.9):

$$\begin{aligned}
|v_i^0|_{C^{l,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} &\leq K_1(n, \alpha, R) \cdot |f|_{C^{l-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + C_1(n, l, \alpha, R) \cdot |f|_{C^{l-2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
&\quad + K_2(n, \alpha, R) \cdot |u|_{C^{l,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})}
\end{aligned}$$

Anwendung der Randabschätzung [GT01, Theorem 4.12] auf  $v_i^j$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $j \in \{1, \dots, k\}$ , ergibt mit (5.31) die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
|u|_{C^{l+1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} &\leq K_3(n, \alpha, R) \cdot |f|_{C^{l-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + C_2(n, l, \alpha, R) \cdot |f|_{C^{l-2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
&\quad + K_4(n, \alpha, R) \cdot |u|_{C^{l,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})}
\end{aligned}$$

Mit dem Maximumprinzip in [GT01, Theorem 3.7] und dem Ehrling-Lemma in [Alt12, U8.2], ergibt sich, aus der Induktionsvoraussetzung, die Abschätzung:

$$|u|_{C^{l+1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \leq K(n, \alpha, R) \cdot |f|_{C^{l-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + C(n, l, \alpha, R) \cdot |f|_{C^{l-2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})}$$

womit die Behauptung gezeigt ist. □



## 5.4 Hölderabschätzungen der Hilfsoperatoren

Um die, in (5.19) und (5.20) eingeführten, Operatoren  $P$  und  $Q$  abzuschätzen, werden wegen (5.25) und (5.29) die Operatoren  $N_i$  und  $M_{ij}$  abgeschätzt. Da für  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$  und  $v \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  stets  $\text{supp}(N_i[a](v)), \text{supp}(M_{ij}[a](v)) \subseteq \text{supp}(a) \subseteq \mathbb{B}$  gilt, wird für Abschätzungen der Komponenten von  $P$  und  $Q$  vor allem die Ungleichung (5.29) verwendet. Anschließend werden noch Eigenschaften des linearen Operators  $E[F_0]$ , wie zum Beispiel die Stetigkeit, bewiesen.

**Lemma 5.8** *Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  gelten für den in (5.1) definierten Operator  $N_i$  die Abschätzungen:*

*Für  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$  und  $v_1, v_2 \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ :*

$$|N_i[a](v_1) - N_i[a](v_2)|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \leq K(n, \alpha, a) \cdot \left( |v_1|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + |v_2|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \right) |v_1 - v_2|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \quad (5.33)$$

*Für  $m \in \mathbb{N}$ ,  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$  und  $v \in C^{m+2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ :*

$$|N_i[a](v)|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \leq K(n, \alpha, a) \cdot |v|_{C^{m+2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |v|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + C(n, m, \alpha, a) \cdot |v|_{C^{m+1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}^2 \quad (5.34)$$

*Beweis.* Sind  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$ ,  $v_1, v_2 \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  und  $i \in \{1, \dots, q\}$ , dann ist nach Definition des Operators  $N_i$  in (5.1):

$$\begin{aligned} & |N_i[a](v_1) - N_i[a](v_2)|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ &= |2\partial_i a \Delta v_1 \cdot v_1 + a \Delta v_1 \cdot \partial_i v_1 - 2\partial_i a \Delta v_2 \cdot v_2 - a \Delta v_2 \cdot \partial_i v_2|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ &\leq |2\partial_i a (\Delta v_1 \cdot v_1 - \Delta v_2 \cdot v_2)|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + |a (\Delta v_1 \cdot \partial_i v_1 - \Delta v_2 \cdot \partial_i v_2)|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ &\stackrel{(A.2)}{\leq} K_1(\alpha, a) \cdot |\Delta v_1 \cdot v_1 - \Delta v_2 \cdot v_2|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + K_1(\alpha, a) \cdot |\Delta v_1 \cdot \partial_i v_1 - \Delta v_2 \cdot \partial_i v_2|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ &\leq K_1(\alpha, a) \cdot |\Delta(v_1 - v_2) \cdot v_1 + \Delta v_2 \cdot (v_1 - v_2)|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ &\quad + K_1(\alpha, a) \cdot |\Delta(v_1 - v_2) \cdot \partial_i v_1 + \Delta v_2 \cdot \partial_i(v_1 - v_2)|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ &\leq K_1(\alpha, a) \cdot |\Delta(v_1 - v_2) \cdot v_1|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + K_1(\alpha, a) \cdot |\Delta v_2 \cdot (v_1 - v_2)|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ &\quad + K_1(\alpha, a) \cdot |\Delta(v_1 - v_2) \cdot \partial_i v_1|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + K_1(\alpha, a) \cdot |\Delta v_2 \cdot \partial_i(v_1 - v_2)|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ &\stackrel{(A.15)}{\leq} K_1(\alpha, a) \cdot |\Delta(v_1 - v_2)|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \cdot |v_1|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ &\quad + K_1(\alpha, a) \cdot |\Delta v_2|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \cdot |v_1 - v_2|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ &\quad + K_1(\alpha, a) \cdot |\Delta(v_1 - v_2)|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \cdot |\partial_i v_1|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + K_1(\alpha, a) \cdot |\Delta v_2|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \cdot |\partial_i(v_1 - v_2)|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
& \stackrel{(A.11)}{\leq} K(n, \alpha, a) \cdot \left( |v_1|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + |v_2|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \right) |v_1 - v_2|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}
\end{aligned}$$

Damit ist (5.33) gezeigt. Nun zu (5.34), es sei  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$  und  $v \in C^{m+2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , dann ist:

$$\begin{aligned}
& |N_i[a](v)|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} = |2\partial_i a \Delta v \cdot v + a \Delta v \cdot \partial_i v|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
& \leq |2\partial_i a \Delta v \cdot v|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + |a \Delta v \cdot \partial_i v|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
& \stackrel{(A.14)}{\leq} |2\partial_i a \Delta v|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |v|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + |2\partial_i a \Delta v|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |v|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
& \quad + C_1(n, m, \alpha) \cdot |2\partial_i a \Delta v|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |v|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
& \quad + |a \Delta v|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |\partial_i v|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + |a \Delta v|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |\partial_i v|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
& \quad + C_1(n, m, \alpha) \cdot |a \Delta v|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |\partial_i v|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
& \stackrel{(A.12)}{\leq} |2\partial_i a|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |\Delta v|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |v|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
& \quad + |2\partial_i a|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |\Delta v|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |v|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + |2\partial_i a|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |\Delta v|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |v|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
& \quad + C_2(n, m, \alpha) \cdot |2\partial_i a|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |\Delta v|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |v|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
& \quad + C_3(n, m, \alpha) \cdot |2\partial_i a|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |\Delta v|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |v|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
& \quad + |a|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |\Delta v|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |\partial_i v|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
& \quad + |a|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |\Delta v|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |\partial_i v|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + |a|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |\Delta v|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |\partial_i v|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
& \quad + C_2(n, m, \alpha) \cdot |a|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |\Delta v|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |\partial_i v|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
& \quad + C_3(n, m, \alpha) \cdot |a|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |\Delta v|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |\partial_i v|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
& \leq K(n, \alpha, a) \cdot |v|_{C^{m+2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |v|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + C(n, m, \alpha, a) \cdot |v|_{C^{m+1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}^2
\end{aligned}$$

□

**Lemma 5.9** Für  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i \leq j$  gelten für den in (5.10) definierten Operator  $M_{ij}$  die Abschätzungen:

Für  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$  und  $v_1, v_2 \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ :

$$\begin{aligned}
& |M_{ij}[a](v_1) - M_{ij}[a](v_2)|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
& \leq K(n, \alpha, a) \cdot \left( |v_1|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + |v_2|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \right) |v_1 - v_2|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Für  $m \in \mathbb{N}$ ,  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$  und  $v \in C^{m+2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ :

$$\begin{aligned} |M_{ij}[a](v)|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} &\leq K(n, \alpha, a) \cdot |v|_{C^{m+2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |v|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ &\quad + C(n, m, \alpha, a) \cdot |v|_{C^{m+1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}^2 \end{aligned} \quad (5.36)$$

*Beweis.* Der Operator  $M_{ij}[a]$  ist die Summe des in Lemma 5.1 definierten Operators  $L_{ij}[a]$ , und des in Lemma 5.2 definierten Operators  $R_{ij}[a]$ . Der Operator  $L_{ij}[a]$  ist eine Summe von Termen der Form  $\partial^{s_1} a \partial^{s_2} (\Delta^{-1} N_l)$  mit  $|s_1| + |s_2| = 3$ ,  $|s_2| \leq 2$  und  $l \in \{i, j\}$ . Demzufolge wird, um (5.35) zu zeigen, für  $v_1, v_2 \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  zunächst die Differenz:

$$\partial^{s_1} a \partial^{s_2} (\Delta^{-1} N_l[a](v_1)) - \partial^{s_1} a \partial^{s_2} (\Delta^{-1} N_l[a](v_2))$$

in der  $|\cdot|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})}$ -Norm abgeschätzt:

$$\begin{aligned} &|\partial^{s_1} a \partial^{s_2} (\Delta^{-1} N_l[a](v_1)) - \partial^{s_1} a \partial^{s_2} (\Delta^{-1} N_l[a](v_2))|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ &= |\partial^{s_1} a \partial^{s_2} [(\Delta^{-1} N_l[a](v_1)) - (\Delta^{-1} N_l[a](v_2))]|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ &\stackrel{(A.2)}{\leq} |\partial^{s_1} a|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \cdot |\partial^{s_2} [(\Delta^{-1} N_l[a](v_1)) - (\Delta^{-1} N_l[a](v_2))]|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ &\leq K_1(\alpha, a) \cdot |\partial^{s_2} \Delta^{-1} [N_l[a](v_1) - N_l[a](v_2)]|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ &\leq K_2(n, \alpha, a) \cdot |\Delta^{-1} [N_l[a](v_1) - N_l[a](v_2)]|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ &\stackrel{(5.24)}{\leq} K_3(n, \alpha, a) \cdot |N_l[a](v_1) - N_l[a](v_2)|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ &\stackrel{(5.33)}{\leq} K_4(n, \alpha, a) \cdot \left( |v_1|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + |v_2|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \right) |v_1 - v_2|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \end{aligned}$$

Nun wird der Ausdruck  $R_{ij}[a](v)$  untersucht. Der Operator ist Summe von Termen der Form:

$$\partial^{s_1} a \partial^{s_2} a \partial^{s_3} v \cdot \partial^{s_4} v$$

mit  $\sum_{i=1}^4 |s_i| = 4$  und  $|s_3|, |s_4| \leq 2$ , also wird die Differenz:

$$\partial^{s_1} a \partial^{s_2} a \partial^{s_3} v_1 \cdot \partial^{s_4} v_1 - \partial^{s_1} a \partial^{s_2} a \partial^{s_3} v_2 \cdot \partial^{s_4} v_2$$

in der  $|\cdot|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})}$ -Norm abgeschätzt:

$$\begin{aligned} &|\partial^{s_1} a \partial^{s_2} a \partial^{s_3} v_1 \cdot \partial^{s_4} v_1 - \partial^{s_1} a \partial^{s_2} a \partial^{s_3} v_2 \cdot \partial^{s_4} v_2|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ &= |\partial^{s_1} a \partial^{s_2} a [\partial^{s_3} v_1 \cdot \partial^{s_4} v_1 - \partial^{s_3} v_2 \cdot \partial^{s_4} v_2]|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(A.9)}{\leq} |\partial^{s_1} a|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |\partial^{s_2} a|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |\partial^{s_3} v_1 \cdot \partial^{s_4} v_1 - \partial^{s_3} v_2 \cdot \partial^{s_4} v_2|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
& \leq K_1(n, \alpha, a) \cdot |\partial^{s_3} v_1 \cdot \partial^{s_4} v_1 - \partial^{s_3} v_2 \cdot \partial^{s_4} v_2|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
& = K_1(n, \alpha, a) \cdot |\partial^{s_3}(v_1 - v_2) \cdot \partial^{s_4} v_1 + \partial^{s_3} v_2 \cdot \partial^{s_4}(v_1 - v_2)|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
& \leq K_1(n, \alpha, a) \cdot |\partial^{s_3}(v_1 - v_2) \cdot \partial^{s_4} v_1|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + |\partial^{s_3} v_2 \cdot \partial^{s_4}(v_1 - v_2)|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
& \stackrel{(A.15)}{\leq} K_2(n, \alpha, a) \cdot |\partial^{s_3}(v_1 - v_2)|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |\partial^{s_4} v_1|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
& \quad + |\partial^{s_3} v_2|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |\partial^{s_4}(v_1 - v_2)|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
& \stackrel{(A.11)}{\leq} K_3(n, \alpha, a) \cdot \left( |v_1|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + |v_2|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \right) \cdot |v_1 - v_2|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}
\end{aligned}$$

Damit ist (5.35) gezeigt. Nun zu (5.36), es sei  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$  und  $v \in C^{m+2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ . Die Summanden von  $L_{ij}[a](v)$  und  $R_{ij}[a](v)$  werden einzeln abgeschätzt. Zuerst wird ein Summand in  $L_{ij}[a](v)$  untersucht: Es seien  $s_1, s_2 \in \mathbb{N}^n$  mit  $|s_1| + |s_2| = 3$ ,  $|s_2| \leq 2$  sowie  $l \in \{i, j\}$ . Zunächst wird der Fall  $m = 0$  betrachtet:

$$\begin{aligned}
& |\partial^{s_1} a \partial^{s_2} (\Delta^{-1} N_l[a](v))|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \stackrel{(A.2)}{\leq} |\partial^{s_1} a|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |\partial^{s_2} (\Delta^{-1} N_l[a](v))|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
& \leq K_1(n, \alpha, a) \cdot |\Delta^{-1} N_l[a](v)|_{C^{|s_2|,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \stackrel{(A.6)}{\leq} K_2(n, \alpha, a) \cdot |\Delta^{-1} N_l[a](v)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
& \stackrel{(5.24)}{\leq} K_3(n, \alpha, a) \cdot |N_l[a](v)|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
& \stackrel{(5.34)}{\leq} K_4(n, \alpha, a) \cdot |v|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}^2 + C_1(n, m, \alpha, a) \cdot |v|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}^2
\end{aligned}$$

Nun sei  $m \geq 1$ , dann ist:

$$\begin{aligned}
& |\partial^{s_1} a \partial^{s_2} (\Delta^{-1} N_l[a](v))|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
& \stackrel{(A.12)}{\leq} |\partial^{s_1} a|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |\partial^{s_2} (\Delta^{-1} N_l[a](v))|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + |\partial^{s_1} a|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |\partial^{s_2} (\Delta^{-1} N_l[a](v))|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
& \quad + C_1(n, m, \alpha) \cdot |\partial^{s_1} a|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |\partial^{s_2} (\Delta^{-1} N_l[a](v))|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
& \stackrel{(A.11)}{\leq} K_1(n, \alpha, a) \cdot |\Delta^{-1} N_l[a](v)|_{C^{m+|s_2|,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + C_2(n, m, \alpha, a) \cdot |\Delta^{-1} N_l[a](v)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \quad (5.37) \\
& \quad + C_3(n, m, \alpha, a) \cdot |\Delta^{-1} N_l[a](v)|_{C^{m+1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
& \stackrel{(5.25)}{\leq} K_1(n, \alpha, a) \cdot |\Delta^{-1} N_l[a](v)|_{C^{m+|s_2|,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + C_4(n, m, \alpha, a) \cdot |N_l[a](v)|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
& \quad + C_5(n, m, \alpha, a) \cdot |N_l[a](v)|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
& \stackrel{(5.34)}{\leq} K_1(n, \alpha, a) \cdot |\Delta^{-1} N_l[a](v)|_{C^{m+|s_2|,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + C_6(n, m, \alpha, a) \cdot |v|_{C^{m+1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}^2
\end{aligned}$$

Ist  $|s_2| \leq 1$ , dann folgt, nach erneuter Anwendung von (5.25) und (5.34), aus (5.37), unter Beachtung von (A.11), die Abschätzung:

$$|\partial^{s_1} a \partial^{s_2} (\Delta^{-1} N_l[a](v))|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B})} \leq C_7(n, m, \alpha, a) \cdot |v|_{C^{m+1,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)}^2$$

und wenn  $|s_2| = 2$  gilt, dann ist:

$$\begin{aligned} & |\Delta^{-1} N_l[a](v)|_{C^{m+|s_2|,\alpha}(\mathbb{B})} = |\Delta^{-1} N_l[a](v)|_{C^{m+2,\alpha}(\mathbb{B})} \\ (5.29) \quad & \leq K_2(n, \alpha, a) \cdot |N_l[a](v)|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B})} + C_8(n, m, \alpha, a) \cdot |N_l[a](v)|_{C^{m-1,\alpha}(\mathbb{B})} \\ (5.34) \quad & \leq K_3(n, \alpha, a) \cdot |v|_{C^{m+2,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} |v|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} + C_9(n, m, \alpha, a) \cdot |v|_{C^{m+1,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)}^2 \end{aligned}$$

und es ergibt sich mit (5.37) die Abschätzung:

$$\begin{aligned} |\partial^{s_1} a \partial^{s_2} (\Delta^{-1} N_l[a](v))|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B})} & \leq K_4(n, \alpha, a) \cdot |v|_{C^{m+2,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} |v|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} \\ & \quad + C_{10}(n, m, \alpha, a) \cdot |v|_{C^{m+1,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)}^2 \end{aligned}$$

Und schließlich zur Abschätzung eines Summanden in  $R_{ij}[a](v)$ . Es seien  $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathbb{N}^n$  mit  $\sum_{l=1}^4 |s_l| = 4$  und  $|s_3|, |s_4| \leq 2$ , wieder wird zuerst der Fall  $m = 0$  untersucht:

$$\begin{aligned} & |\partial^{s_1} a \partial^{s_2} a \partial^{s_3} v \cdot \partial^{s_4} v|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} \\ (A.13), (A.15) \quad & \leq K_1(n, \alpha, a) \cdot |v|_{C^{|s_3|,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} |v|_{C^{|s_4|,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} \stackrel{(A.11)}{\leq} K_2(n, \alpha, a) \cdot |v|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)}^2 \end{aligned}$$

Und für  $m \geq 1$ :

$$\begin{aligned} & |\partial^{s_1} a \partial^{s_2} a \partial^{s_3} v \cdot \partial^{s_4} v|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B})} \\ (A.12) \quad & \leq |\partial^{s_1} a \partial^{s_2} a|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} |\partial^{s_3} v \cdot \partial^{s_4} v|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B})} + |\partial^{s_1} a \partial^{s_2} a|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B})} |\partial^{s_3} v \cdot \partial^{s_4} v|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} \\ & \quad + C_1(n, m, \alpha) \cdot |\partial^{s_1} a \partial^{s_2} a|_{C^{m-1,\alpha}(\mathbb{B})} \cdot |\partial^{s_3} v \cdot \partial^{s_4} v|_{C^{m-1,\alpha}(\mathbb{B})} \\ (A.15) \quad & \leq K_1(n, \alpha, a) \cdot |\partial^{s_3} v \cdot \partial^{s_4} v|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B})} + C_2(n, m, \alpha, a) \cdot |\partial^{s_3} v|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} |\partial^{s_4} v|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} \\ & \quad + C_3(n, m, \alpha, a) \cdot |\partial^{s_3} v|_{C^{m-1,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} |\partial^{s_4} v|_{C^{m-1,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} \quad (5.38) \\ (A.11) \quad & \leq K_1(n, \alpha, a) \cdot |\partial^{s_3} v \cdot \partial^{s_4} v|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B})} + C_4(n, m, \alpha, a) \cdot |v|_{C^{m+1,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)}^2 \\ (A.14) \quad & \leq K_1(n, \alpha, a) \cdot \left( |\partial^{s_3} v|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} |\partial^{s_4} v|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} + |\partial^{s_3} v|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} |\partial^{s_4} v|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} \right) \\ & \quad + C_5(n, m, \alpha, a) \cdot |\partial^{s_3} v|_{C^{m-1,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} |\partial^{s_4} v|_{C^{m-1,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} + C_4(n, m, \alpha, a) \cdot |v|_{C^{m+1,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(A.11)}{\leq} K_2(n, \alpha, a) \cdot \left[ |v|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \left( |\partial^{s_3} v|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + |\partial^{s_4} v|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \right) \right] \\
& \quad + C_6(n, m, \alpha, a) \cdot |v|_{C^{m+1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}^2
\end{aligned}$$

Ist nun  $|s_3| \leq 1$  und  $|s_4| \leq 1$ , so folgt, durch nochmalige Anwendung von (A.11), aus (5.38) die Abschätzung:

$$|\partial^{s_1} a \partial^{s_2} a \partial^{s_3} v \cdot \partial^{s_4} v|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \leq C_7(n, m, \alpha, a) \cdot |v|_{C^{m+1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}^2$$

und wenn  $|s_3| = 2$  oder  $|s_4| = 2$  gilt, dann folgt aus (5.38) die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
|\partial^{s_1} a \partial^{s_2} a \partial^{s_3} v \cdot \partial^{s_4} v|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} & \leq K_3(n, \alpha, a) \cdot |v|_{C^{m+2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |v|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
& \quad + C_7(n, m, \alpha, a) \cdot |v|_{C^{m+1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}^2
\end{aligned}$$

womit (5.36) gezeigt ist. □

**Lemma 5.10** *Die in (5.19) und (5.20) definierten Operatoren  $P$  und  $Q$  erfüllen die Abschätzungen:*

Für  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$  und  $v_1, v_2 \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ :

$$\begin{aligned}
& |P[a](v_1) - P[a](v_2)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n)} + |Q[a](v_1) - Q[a](v_2)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \\
& \leq K(n, \alpha, a) \cdot \left( |v_1|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + |v_2|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \right) \cdot |v_1 - v_2|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Für  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ,  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$  und  $v \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ :

$$\begin{aligned}
& |P[a](v)|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n)} + |Q[a](v)|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \\
& \leq K(n, \alpha, a) \cdot |v|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \cdot |v|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + C(n, m, \alpha, a) \cdot |v|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}^2
\end{aligned} \tag{5.40}$$

*Beweis.* Für  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$  und  $v_1, v_2 \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  gilt:

$$\begin{aligned}
& |P[a](v_1) - P[a](v_2)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n)} = \sum_{l=1}^n |P_l[a](v_1) - P_l[a](v_2)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
& \stackrel{(5.19)}{=} \sum_{i=1}^n |a \Delta^{-1} N_i[a](v_1) - a \Delta^{-1} N_i[a](v_2)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n |a \Delta^{-1} [N_i[a](v_1) - N_i[a](v_2)]|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
&\stackrel{(A.9)}{\leq} K_1(n, \alpha) \cdot \sum_{i=1}^n |a|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |\Delta^{-1} [N_i[a](v_1) - N_i[a](v_2)]|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
&\leq K_2(n, \alpha, a) \cdot \sum_{i=1}^n |\Delta^{-1} [N_i[a](v_1) - N_i[a](v_2)]|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
&\stackrel{(5.24)}{\leq} K_3(n, \alpha, a) \cdot |N_i[a](v_1) - N_i[a](v_2)|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
&\stackrel{(5.33)}{\leq} K_4(n, \alpha, a) \cdot \left( |v_1|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + |v_2|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \right) |v_1 - v_2|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}
\end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned}
&|Q[a](v_1) - Q[a](v_2)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \leq \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} |Q_{ij}[a](v_1) - Q_{ij}[a](v_2)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
&\stackrel{(5.20)}{=} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} |\Delta^{-1} M_{ij}[a](v_1) - \Delta^{-1} M_{ij}[a](v_2)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
&= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} |\Delta^{-1} [M_{ij}[a](v_1) - M_{ij}[a](v_2)]|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
&\stackrel{(5.24)}{\leq} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} K_5(n, \alpha, a) \cdot |M_{ij}[a](v_1) - M_{ij}[a](v_2)|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
&\stackrel{(5.35)}{\leq} K_6(n, \alpha, a) \cdot \left( |v_1|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + |v_2|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \right) |v_1 - v_2|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}
\end{aligned}$$

Damit ist (5.39) gezeigt. Nun sei  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$  und  $v \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , für  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , dann gilt:

$$\begin{aligned}
&|P[a](v)|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n)} = \sum_{i=1}^n |P_i[a](v)|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \stackrel{(5.19)}{=} \sum_{i=1}^n |a \Delta^{-1} N_i[a](v)|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
&\stackrel{(A.12)}{\leq} \sum_{i=1}^n |a|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |\Delta^{-1} N_i[a](v)|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + \sum_{i=1}^n |a|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |\Delta^{-1} N_i[a](v)|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
&\quad + C_1(n, m, \alpha) \cdot \sum_{i=1}^n |a|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |\Delta^{-1} N_i[a](v)|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \tag{5.41} \\
&\leq K_1(\alpha, a) \cdot \sum_{i=1}^n |\Delta^{-1} N_i[a](v)|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + C_2(m, \alpha, a) \cdot \sum_{i=1}^n |\Delta^{-1} N_i[a](v)|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
&\quad + C_3(n, m, \alpha, a) \cdot \sum_{i=1}^n |\Delta^{-1} N_i[a](v)|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})}
\end{aligned}$$

$$\stackrel{(A.6)}{\leq} K_1(\alpha, a) \cdot \sum_{i=1}^n |\Delta^{-1} N_i[a](v)|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B})} + C_4(n, m, \alpha, a) \cdot \sum_{i=1}^n |\Delta^{-1} N_i[a](v)|_{C^{m-1,\alpha}(\mathbb{B})}$$

Ist  $m = 2$ , dann folgt mit (A.6) aus (5.41) die Abschätzung:

$$\begin{aligned} |P[a](v)|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^n)} &\leq K_2(n, \alpha, a) \cdot \sum_{i=1}^n |\Delta^{-1} N_i[a](v)|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{B})} \\ &\stackrel{(5.24)}{\leq} K_3(n, \alpha, a) \cdot \sum_{i=1}^n |N_i[a](v)|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} \stackrel{(5.34)}{\leq} K_4(n, \alpha, a) \cdot \left( |v|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)}^2 + |v|_{C^{1,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)}^2 \right) \end{aligned}$$

und falls  $m \geq 3$  gilt, dann folgt aus (5.41) und (5.29), mit (A.6), die Abschätzung:

$$\begin{aligned} &|P[a](v)|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^n)} \\ &\leq K_5(n, \alpha, a) \cdot \sum_{i=1}^n |N_i[a](v)|_{C^{m-2,\alpha}(\mathbb{B})} + C_5(n, m, \alpha, a) \cdot \sum_{i=1}^n |N_i[a](v)|_{C^{m-3,\alpha}(\mathbb{B})} \\ &\stackrel{(5.34)}{\leq} K_6(n, \alpha, a) \cdot |v|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} |v|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} + C_6(n, m, \alpha, a) \cdot |v|_{C^{m-1,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)}^2 \end{aligned}$$

und schließlich für  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ :

$$|Q[a](v)|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} |Q_{ij}[a](v)|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B})} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} |\Delta^{-1} M_{ij}[a](v)|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B})} \quad (5.42)$$

Falls  $m = 2$ , dann folgt, unter Beachtung von (A.6), aus (5.42):

$$\begin{aligned} |Q[a](v)|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} &\stackrel{(5.24)}{\leq} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} |M_{ij}[a](v)|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} \\ &\stackrel{(5.36)}{\leq} K_7(n, \alpha, a) \cdot \left( |v|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)}^2 + |v|_{C^{1,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)}^2 \right) \end{aligned}$$

und wenn  $m \geq 3$  gilt, dann folgt aus (5.42) und (5.29) mit (A.6) die Abschätzung:

$$\begin{aligned} &|Q[a](v)|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \\ &\leq K_8(n, \alpha, a) \cdot \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} |M_{ij}[a](v)|_{C^{m-2,\alpha}(\mathbb{B})} + C_7(n, m, \alpha, a) \cdot \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} |M_{ij}[a](v)|_{C^{m-3,\alpha}(\mathbb{B})} \\ &\stackrel{(5.36)}{\leq} K_9(n, \alpha, a) \cdot |v|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} |v|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} + C_8(n, m, \alpha, a) \cdot |v|_{C^{m-1,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)}^2 \end{aligned}$$

womit (5.40) gezeigt ist.



□

Damit wurden die wesentlichen Abschätzungen für die Operatoren  $P$  und  $Q$  gezeigt. In den nächsten beiden Lemmata wird der in (5.17) eingeführte lineare Operator  $E[F_0]$  genauer untersucht. Zunächst wird die Stetigkeit gezeigt:

**Lemma 5.11** *Für eine beliebige freie Abbildung  $F_0 \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  ist der lineare Operator  $E[F_0]$  stetig, und es gilt für  $h \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n)$  und  $f \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$  die Abschätzung:*

$$|E[F_0](h, f)|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \leq C(n, q, m, \alpha, F_0) \cdot \left( |h|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n)} + |f|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \right) \quad (5.43)$$

*Beweis.* Nach Definition gilt für die  $l$ -te Komponente von  $E[F_0](h, f)$  die Gleichung:

$$E_l[F_0](h, f) = \sum_{i=1}^n A_{l,i} h_i + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} B_{l,ij} f_{ij} \quad (5.44)$$

für Funktionen  $\{A_{l,i}\}_{1 \leq i \leq n} \subseteq C^\infty(\overline{\mathbb{B}})$  und  $\{B_{l,ij}\}_{1 \leq i \leq j \leq n} \subseteq C^\infty(\overline{\mathbb{B}})$ , siehe hierfür auch (5.16). Diese Funktionen hängen nur von Ableitungen der freien Abbildung  $F_0$  ab. Sei nun  $s \in \mathbb{N}^n$  ein Multiindex der Ordnung  $k$  für ein  $k \in \{0, \dots, m\}$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} |\partial^s(E_l[F_0](h, f))|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} &= \left| \sum_{i=1}^n \partial^s(A_{l,i} h_i) + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \partial^s(B_{l,ij} f_{ij}) \right|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ &\stackrel{(A.7)}{=} \left| \sum_{i=1}^n \sum_{r \leq s} \binom{s}{r} \partial^r A_{l,i} \partial^{s-r} h_i + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \sum_{r \leq s} \binom{s}{r} \partial^r B_{l,ij} \partial^{s-r} f_{ij} \right|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{r \leq s} \binom{s}{r} |\partial^r A_{l,i} \partial^{s-r} h_i|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \sum_{r \leq s} \binom{s}{r} |\partial^r B_{l,ij} \partial^{s-r} f_{ij}|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ &\stackrel{(A.2)}{\leq} \sum_{i=1}^n \sum_{r \leq s} \binom{s}{r} |\partial^r A_{l,i}|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |\partial^{s-r} h_i|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ &\quad + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \sum_{r \leq s} \binom{s}{r} |\partial^r B_{l,ij}|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |\partial^{s-r} f_{ij}|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{r \leq s} \binom{s}{r} |A_{l,i}|_{C^{|r|,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |h_i|_{C^{|s-r|,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ &\quad + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \sum_{r \leq s} \binom{s}{r} |B_{l,ij}|_{C^{|r|,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |f_{ij}|_{C^{|s-r|,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ &\stackrel{(A.6)}{\leq} C_1(n, k, \alpha, F_0) \cdot \left( |h|_{C^{k,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n)} + |f|_{C^{k,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \right) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
|E_l[F_0](h, f)|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} &= |E_l[F_0](h, f)|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + \sum_{|s|=m} |\partial^s(E_l[F_0](h, f))|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
&\leq C_2(n, \alpha, F_0) \cdot \left( |h|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n)} + |f|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \right) \\
&\quad + C_3(n, m, \alpha, F_0) \cdot \left( |h|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n)} + |f|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \right) \\
&\stackrel{(A.11)}{\leq} C_4(n, m, \alpha, F_0) \cdot \left( |h|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n)} + |f|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \right)
\end{aligned}$$

und schließlich:

$$\begin{aligned}
|E[F_0](h, f)|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} &= \sum_{l=1}^q |E_l[F_0](h, f)|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
&\leq C(n, q, m, \alpha, F_0) \cdot \left( |h|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n)} + |f|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \right)
\end{aligned}$$

□

Für die nachfolgenden Betrachtungen wird, für  $m \in \mathbb{N}$ , die Operatornorm des stetigen linearen Operators  $E[F_0]$  aus (5.17) mit  $\|E[F_0]\|_{m,\alpha}$  bezeichnet, siehe hierfür auch [Alt12, 3.2]. Die Abschätzung (5.43) kann noch verschärft werden:

**Lemma 5.12** *Es sei  $m \geq 3$  dann gilt für den Operator  $E[F_0]$  die Abschätzung:*

$$\begin{aligned}
|E[F_0](h, f)|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} &\leq \|E[F_0]\|_{2,\alpha} \cdot \left( |h|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n)} + |f|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \right) \\
&\quad + C(n, q, m, \alpha, F_0) \cdot \left( |h|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n)} + |f|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \right)
\end{aligned} \tag{5.45}$$

für alle  $h \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n)$  und  $f \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$ .

*Beweis.* Sei  $l \in \{1, \dots, q\}$  und  $s \in \mathbb{N}^n$  ein Multiindex der Ordnung  $m-2$ , dann gilt mit (5.44):

$$\begin{aligned}
\partial^s(E_l[F_0](h, f)) &= \sum_{i=1}^n \partial^s(A_{l,i}h_i) + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \partial^s(B_{l,ij}f_{ij}) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{r \leq s} \binom{s}{r} \partial^r A_{l,i} \partial^{s-r} h_i + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \sum_{r \leq s} \binom{s}{r} \partial^r B_{l,ij} \partial^{s-r} f_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^n A_{l,i} \partial^s h_i + \sum_{i=1}^n \sum_{0 < r \leq s} \binom{s}{r} \partial^r A_{l,i} \partial^{s-r} h_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} B_{l,ij} \partial^s f_{ij} + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \sum_{0 < r \leq s} \binom{s}{r} \partial^r B_{l,ij} \partial^{s-r} f_{ij} \\
& = E_l[F_0](\partial^s h, \partial^s f) + \sum_{0 < r \leq s} \binom{s}{r} [\partial^r A_{l,i} \partial^{s-r} h_i + \partial^r B_{l,ij} \partial^{s-r} f_{ij}]
\end{aligned}$$

Daraus folgt mit (A.6), wegen  $|s| = m - 2$ :

$$\begin{aligned}
& |\partial^s E_l[F_0](h, f) - E_l[F_0](\partial^s h, \partial^s f)|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{B})} \\
& \leq C_1(n, \alpha) \cdot \sum_{0 < r \leq s} \binom{s}{r} |\partial^r A_{l,i}|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{B})} \cdot |\partial^{s-r} h_i|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{B})} \\
& \quad + C_1(n, \alpha) \cdot \sum_{0 < r \leq s} \binom{s}{r} |\partial^r B_{l,ij}|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{B})} \cdot |\partial^{s-r} f_{ij}|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{B})} \\
& \leq C_2(n, m, \alpha, F_0) \cdot \left( |h|_{C^{m-1,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^n)} + |f|_{C^{m-1,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \right)
\end{aligned}$$

Dies impliziert:

$$\begin{aligned}
& |\partial^s E[F_0](h, f) - E[F_0](\partial^s h, \partial^s f)|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} \\
& = \sum_{l=1}^q |\partial^s E_l[F_0](h, f) - E_l[F_0](\partial^s h, \partial^s f)|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{B})} \\
& \leq C_3(n, q, m, \alpha, F_0) \cdot \left( |h|_{C^{m-1,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^n)} + |f|_{C^{m-1,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \right)
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
& |E[F_0](h, f)|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} \leq |E[F_0](h, f)|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} + \sum_{|s|=m-2} |\partial^s E[F_0](h, f)|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} \\
& \leq \|E[F_0]\|_{0,\alpha} \cdot \left( |h|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^n)} + |f|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \right) \\
& \quad + \sum_{|s|=m-2} |\partial^s E[F_0](h, f) - E[F_0](\partial^s h, \partial^s f)|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} + \sum_{|s|=m-2} |E[F_0](\partial^s h, \partial^s f)|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} \\
& \leq \|E[F_0]\|_{0,\alpha} \cdot \left( |h|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^n)} + |f|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \right) \\
& \quad + C(n, q, m, \alpha, F_0) \cdot \left( |h|_{C^{m-1,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^n)} + |f|_{C^{m-1,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \right) \\
& \quad + \sum_{|s|=m-2} \|E[F_0]\|_{2,\alpha} \cdot \left( |\partial^s h|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^n)} + |\partial^s f|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \right)
\end{aligned}$$

woraus mit (A.11) die gewünschte Abschätzung folgt. □

## 5.5 Lösung des Fixpunktproblems

Die in Abschnitt 5.4 bewiesenen Abschätzungen werden nun verwendet, um zu zeigen, dass die Fixpunktgleichung (5.22) eine Lösung besitzt, sofern für die Abbildung  $f \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$ ,  $m \geq 2$ , der Ausdruck  $\|E[F_0]\|_{2,\alpha} |E[F_0](0, f)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}$  klein genug ist. Darüber hinaus wird gezeigt, dass sich die Regularität von  $f$  auf den konstruierten Fixpunkt überträgt.

**Lemma 5.13** *Es sei  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$ , dann existiert ein  $\vartheta(n, \alpha, a) \in \mathbb{R}_{>0}$ , mit der folgenden Eigenschaft: Ist eine freie Abbildung  $F_0 \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , und ein  $f \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$ , für  $m \geq 2$ , gegeben, so dass:*

$$\|E[F_0]\|_{2,\alpha} |E[F_0](0, f)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \leq \vartheta$$

*erfüllt ist, dann besitzt der in (5.21) definierte Operator  $\Phi[F_0, a, f]$  einen Fixpunkt  $v \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , welcher die Abschätzung:*

$$|v|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \leq |E[F_0](0, f)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \quad (5.47)$$

*erfüllt. Ferner gilt:  $v \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , falls  $f \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$ .*

*Beweis.* Ist  $f \equiv 0$ , dann ist  $v \equiv 0$  ein Fixpunkt des Operators  $\Phi[F_0, a, f]$ . Es sei also  $f \not\equiv 0$ . Definiere eine Folge  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  wie folgt:

$$v_k = \begin{cases} 0 & \text{falls } k = 0 \\ \Phi[F_0, a, f](v_{k-1}) & \text{falls } k \geq 1 \end{cases} \quad (5.48)$$

Zunächst wird gezeigt, dass diese Folge eine Cauchyfolge in der  $|\cdot|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}$ -Norm ist, falls der Ausdruck  $\|E[F_0]\|_{2,\alpha} |E[F_0](0, f)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}$  klein genug ist. Dann konvergiert diese Folge, aufgrund der Vollständigkeit des Raumes  $C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , gegen ein Grenzelement  $v \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ . Dazu wird zunächst gezeigt, dass die Folge beschränkt ist, sofern der Ausdruck  $\|E[F_0]\|_{2,\alpha} |E[F_0](0, f)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}$  hinreichend klein ist. Für  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  gilt, unter Beachtung der Linearität des Operators  $E[F_0]$ :

$$\begin{aligned} |v_k|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} &\stackrel{(5.48)}{=} |\Phi[F_0, a, f](v_{k-1})|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ &\stackrel{(5.21)}{=} \left| E[F_0] \left( P[a](v_{k-1}), \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}Q[a](v_{k-1}) \right) \right|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| E[F_0] \left( P[a](v_{k-1}), -\frac{1}{2}Q[a](v_{k-1}) \right) \right|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + \left| E[F_0] \left( 0, \frac{1}{2}f \right) \right|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
&\stackrel{(5.43)}{\leq} \|E[F_0]\|_{2,\alpha} \cdot \left[ |P[a](v_{k-1})|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n)} + |Q[a](v_{k-1})|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} |E[F_0](0, f)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
&\stackrel{(5.40)}{\leq} K_1(n, \alpha, a) \cdot \|E[F_0]\|_{2,\alpha} \cdot |v_{k-1}|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}^2 + \frac{1}{2} |E[F_0](0, f)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}
\end{aligned}$$

Falls nun:

$$\|E[F_0]\|_{2,\alpha} |E[F_0](0, f)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \leq \frac{1}{2K_1(n, \alpha, a)}$$

gilt, so ist:

$$|v_k|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{|v_{k-1}|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}^2}{|E[F_0](0, f)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}} + |E[F_0](0, f)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \right)$$

woraus induktiv, wegen  $v_0 \equiv 0$ , für alle  $k \in \mathbb{N}$  die Abschätzung:

$$|v_k|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \leq |E[F_0](0, f)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \quad (5.49)$$

folgt. Daraus resultiert für  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :

$$\begin{aligned}
&|v_{k+1} - v_k|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \stackrel{(5.48)}{=} |\Phi[F_0, a, f](v_k) - \Phi[F_0, a, f](v_{k-1})|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
&\stackrel{(5.21)}{=} \left| E[F_0] \left( P[a](v_k) - P[a](v_{k-1}), -\frac{1}{2}(Q[a](v_k) - Q[a](v_{k-1})) \right) \right|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
&\stackrel{(5.43)}{\leq} \|E[F_0]\|_{2,\alpha} \cdot \left( |P[a](v_k) - P[a](v_{k-1})|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n)} \right. \\
&\quad \left. + |Q[a](v_k) - Q[a](v_{k-1})|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \right) \\
&\stackrel{(5.39)}{\leq} \widehat{K}_2(n, \alpha, a) \cdot \|E[F_0]\|_{2,\alpha} \cdot \left( |v_k|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + |v_{k-1}|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \right) |v_k - v_{k-1}|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
&\stackrel{(5.49)}{\leq} K_2(n, \alpha, a) \cdot \|E[F_0]\|_{2,\alpha} |E[F_0](0, f)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |v_k - v_{k-1}|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}
\end{aligned}$$

Gilt dann die Abschätzung:

$$\|E[F_0]\|_{2,\alpha} |E[F_0](0, f)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \leq \frac{1}{2K_2(n, \alpha, a)}$$

dann ist:

$$|v_{k+1} - v_k|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \leq \frac{1}{2} |v_k - v_{k-1}|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}$$

und die Folge  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  ist eine Cauchy-Folge, die im  $C^{2,\alpha}$ -Sinne gegen ein  $v \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  konvergiert, sofern die Abschätzung  $\|E[F_0]\|_{2,\alpha} |E[F_0](0, f)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \leq \frac{1}{2} \min \{K_1^{-1}, K_2^{-1}\}$  erfüllt ist. Um zu zeigen, dass  $v \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  gilt, wird gezeigt, dass die Folge  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in der  $|\cdot|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}$ -Norm beschränkt ist. Dann existiert mit dem Satz von Arzelà-Ascoli [Alt12, 2.12] eine Teilfolge von  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , die im  $C^{m,\alpha}$ -Sinne gegen  $v$  konvergiert, womit dann  $v \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  gezeigt ist. Mit (5.49) ist die Behauptung für  $m = 2$  richtig. Es sei also  $m \geq 3$ , unter der Annahme, dass:

$$|v_k|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \leq \eta \quad (5.50)$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt, wobei  $\eta$  nicht von  $k$  abhängt. Sei nun  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  dann ist:

$$\begin{aligned} & |v_k|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \stackrel{(5.48)}{=} |\Phi[F_0, a, f](v_{k-1})|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ (5.21) \quad & \stackrel{=}{=} \left| E[F_0] \left( P[a](v_{k-1}), \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}Q[a](v_{k-1}) \right) \right|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ & \leq \left| E[F_0] \left( P[a](v_{k-1}), -\frac{1}{2}Q[a](v_{k-1}) \right) \right|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + \left| E[F_0] \left( 0, \frac{1}{2}f \right) \right|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ (5.45) \quad & \leq \|E[F_0]\|_{2,\alpha} \cdot \left( |P[a](v_{k-1})|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n)} + |Q[a](v_{k-1})|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \right) \\ & \quad + C_1(n, q, m, \alpha, F_0) \cdot \left( |P[a](v_{k-1})|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n)} + |Q[a](v_{k-1})|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \right) \\ & \quad + \frac{1}{2} |E[F_0](0, f)|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ (5.40) \quad & \leq K_3(n, \alpha, a) \cdot \|E[F_0]\|_{2,\alpha} \cdot |v_{k-1}|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |v_{k-1}|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + \frac{1}{2} |E[F_0](0, f)|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ & \quad + C_2(n, q, m, \alpha, F_0, a) \cdot |v_{k-1}|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}^2 \\ (5.49) \quad & \leq K_3(n, \alpha, a) \cdot \|E[F_0]\|_{2,\alpha} |E[F_0](0, f)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \cdot |v_{k-1}|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ & \quad + \frac{1}{2} |E[F_0](0, f)|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + C_2(n, q, m, \alpha, F_0, a) \cdot |v_{k-1}|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}^2 \end{aligned}$$

Falls nun:

$$\|E[F_0]\|_{2,\alpha} \cdot |E[F_0](0, f)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \leq \frac{1}{2K_3(n, \alpha, a)}$$

erfüllt ist, dann gilt:

$$\begin{aligned}
|v_k|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} &\leq \frac{1}{2} \left( |v_{k-1}|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + |E[F_0](0, f)|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \right) \\
&\quad + C_2(n, q, m, \alpha, F_0, a) \cdot |v_{k-1}|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}^2 \\
&\stackrel{(5.50)}{\leq} \frac{1}{2} \left( |v_{k-1}|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + |E[F_0](0, f)|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + C(n, q, m, \alpha, F_0, a, \eta) \right)
\end{aligned}$$

und es folgt, wegen  $v_0 \equiv 0$ , mit Lemma C.4 induktiv für alle  $k \in \mathbb{N}$  die Abschätzung:

$$|v_k|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \leq |E[F_0](0, f)|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + C(n, q, m, \alpha, F_0, a, \eta) \quad (5.51)$$

Die zu beweisenden Aussagen gelten also für die Wahl:

$$\vartheta(n, \alpha, a) := \frac{1}{2} \min \{K_1^{-1}, K_2^{-1}, K_3^{-1}\}$$

□

Es seien nun offene Mengen  $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{B}$  mit  $\overline{U}_1 \subseteq U_2$  und  $\overline{U}_2 \subseteq \mathbb{B}$ , und es sei  $f \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$ , für  $m \geq 3$ , mit der Eigenschaft  $\text{supp}(f) \subseteq U_1$ , wie am Anfang des Kapitels beschrieben, gegeben. Dann existiert mit [Lee03, Proposition. 2.26] ein  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$ , so dass  $a|_{\overline{U}_1} \equiv 1$  und  $\text{supp}(a) \subseteq U_2$  gilt. Daraus folgt  $f \equiv a^2 f$ . Es bezeichne  $v \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  den, in Lemma 5.13 konstruierten, Fixpunkt des Operators  $\Phi[F_0, a, f]$ . Dann ist, unter Beachtung von Lemma 5.3, für die Funktion  $u := a^2 v \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  die Gleichung  $\partial_i(F_0 + u) \cdot \partial_j(F_0 + u) = \partial_i F_0 \cdot \partial_j F_0 + f_{ij}$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i \leq j$  erfüllt. Mit (5.47) und (A.13) gilt die Abschätzung  $|u|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \leq C(n, \alpha, a) \cdot |E[F_0](0, f)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}$ . Daraus folgt der Existenzsatz:

**Satz 5.1** *Gegeben seien offene Mengen  $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{B}$  mit  $\overline{U}_1 \subseteq U_2$  und  $\overline{U}_2 \subseteq \mathbb{B}$ . Dann existiert ein  $\vartheta \in \mathbb{R}_{>0}$  mit der folgenden Eigenschaft: Ist eine freie Abbildung  $F_0 \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  und ein  $f \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$ , für  $m \geq 3$ , mit  $\text{supp}(f) \subseteq U_1$  gegeben, so dass:*

$$\|E[F_0]\|_{2,\alpha} |E[F_0](0, f)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \leq \vartheta \quad (5.52)$$

*erfüllt ist, dann existiert ein  $u \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  mit  $\text{supp}(u) \subseteq U_2$ , so dass für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i \leq j$  die Gleichung:*

$$\partial_i(F_0 + u) \cdot \partial_j(F_0 + u) = \partial_i F_0 \cdot \partial_j F_0 + f_{ij}$$

erfüllt ist. Ferner gilt die Abschätzung:

$$|u|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \leq C \cdot |E[F_0](0, f)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \quad (5.53)$$

Die Konstanten  $\vartheta$  und  $C$  hängen dabei weder von  $F_0$  noch von  $m$  ab. Darüber hinaus gilt:  $u \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  falls  $f \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$ .



## 6 Konstruktion der isometrischen Einbettung

In Abschnitt 6.1 werden Satz 4.1 und Satz 5.1 dafür verwendet, um Satz 3.2 zu zeigen, womit das lokale Problem gelöst ist. Anschließend wird in Abschnitt 6.2, unter Verwendung von Satz 3.1, der Hauptsatz 1.1 gezeigt. Mit dem Existenzsatz für eine freie Einbettung aus Kapitel 2, speziell Satz 2.3, folgt die Existenz einer isometrischen Einbettung, für eine gegebene geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(M, g)$ . Dies entspricht Hauptsatz 1.2.

### 6.1 Lösung des lokalen Problems

Zum Beweis von Satz 3.2. Die Aussage des Satzes ist:

**Satz** Gegeben sei eine  $n$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit  $M$ , und eine freie Einbettung  $F_0 \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$ , mit  $q \geq \frac{n}{2}(n+3) + 5$ . Weiterhin sei ein glattes symmetrisches kovariantes 2-Tensorfeld  $h \in \mathcal{T}^2(M)$  gegeben, für das eine Karte  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ , mit  $\varphi(U) = B_{1+\tau}(0)$ , für  $\tau > 0$ , und eine Abbildung  $a \in C_0^\infty(U)$  existiert, welche  $\text{supp}(a) \subseteq \varphi^{-1}(\mathbb{B})$  erfüllt, so dass:

$$h(x) = \begin{cases} a^4(x) \cdot \varphi dx^1|_x^2 & \text{für } x \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.1)$$

gilt. Dann existiert zu jedem  $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  eine freie Einbettung  $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$ , so dass:

$$F^*(g^{can}) = F_0^*(g^{can}) + h \quad (6.2)$$

$$\text{supp}(F - F_0) \subseteq U \quad (6.3)$$

$$\max_{x \in M} |F(x) - F_0(x)|_{\mathbb{R}^q} \leq C \cdot \epsilon \quad (6.4)$$

gilt, wobei die Konstante  $C \in \mathbb{R}_{>0}$  nicht von  $\epsilon$  abhängt.

---

*Beweis.* Die Abbildung  $\varphi F_0|_{\mathbb{B}} \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  wird wieder mit  $F_0$  bezeichnet. Mit Satz 4.1 existiert eine kompakte Menge  $K \subseteq \mathbb{B}$ , mit  $\text{supp}(a) \subseteq K$ , so dass die folgende Aussage gilt: Für jedes  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  existiert ein  $\epsilon_k > 0$ , so dass für alle  $\epsilon \in (0, \epsilon_k]$  eine freie Abbildung  $F_{\epsilon,k} \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  existiert, welche die Eigenschaften:

(i)

$$\begin{aligned} \partial_1 F_{\epsilon,k} \cdot \partial_1 F_{\epsilon,k} &= \partial_1 F_0 \cdot \partial_1 F_0 + a^4 + \epsilon^{k+1} f_{11}^{\epsilon,k} \\ \partial_1 F_{\epsilon,k} \cdot \partial_i F_{\epsilon,k} &= \partial_1 F_0 \cdot \partial_i F_0 + \epsilon^{k+1} f_{1i}^{\epsilon,k} \quad \text{für } 2 \leq i \leq n \\ \partial_i F_{\epsilon,k} \cdot \partial_j F_{\epsilon,k} &= \partial_i F_0 \cdot \partial_j F_0 + \epsilon^{k+1} f_{ij}^{\epsilon,k} \quad \text{für } 2 \leq i \leq j \leq n \end{aligned}$$

(ii)

$$\text{supp}(F_{\epsilon,k} - F_0) \in C_0^\infty(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)$$

(iii)

$$\max_{x \in \mathbb{B}} |F_{\epsilon,k}(x) - F_0(x)|_{\mathbb{R}^q} \leq C(n, k, F_0, a) \cdot \epsilon$$

erfüllt. Hierbei ist  $f^{\epsilon,k} := (f_{ij}^{\epsilon,k})_{1 \leq i \leq j \leq n} \in C_0^\infty(\mathbb{B}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$  mit  $\text{supp}(f^{\epsilon,k}) \subseteq K$ . Diese Abbildung erfüllt die Abschätzung:

(iv)

$$\|f^{\epsilon,k}\|_{C^3(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \leq C(n, k, F_0, a) \cdot \epsilon^{-3}$$

Nun sei  $U_1 \subseteq \mathbb{B}$  eine offene Menge mit  $K \subseteq U_1$  und  $\overline{U}_1 \subseteq \overline{\mathbb{B}}$ . Mit (6.1), (i) und (iv) gilt für  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i \leq j$  die Abschätzung:

$$\begin{aligned} |\partial_i F_{\epsilon,k} \cdot \partial_j F_{\epsilon,k} - \partial_i F_0 \cdot \partial_j F_0 - \varphi h_{ij}|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} &= \epsilon^{k+1} \left| f_{ij}^{\epsilon,k} \right|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ &\leq C(n, \alpha) \cdot \epsilon^{k+1} \|f_{ij}^{\epsilon,k}\|_{C^3(\overline{\mathbb{B}})} \leq C(n, k, F_0, a) \cdot \epsilon^{k-2} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Hierbei sei  $\alpha \in (0, 1)$  auch für die folgenden Betrachtungen fest gewählt. Da  $F_{\epsilon,k}$  für  $\epsilon \in (0, \epsilon_k]$  eine freie Abbildung ist, so ist, für  $m \in \mathbb{N}$ , der in (5.17) eingeführte Operator  $E[F_{\epsilon,k}]$ :

$$\begin{aligned} E[F_{\epsilon,k}] : C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n) \times C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)}) &\longrightarrow C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q) \\ E[F_{\epsilon,k}](\widehat{h}, f)(x) &:= \Theta[F_{\epsilon,k}](x) \cdot \begin{pmatrix} \widehat{h}(x) \\ f(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

wobei  $\Theta[F_{\epsilon,k}] \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{q \times \frac{n}{2}(n+3)})$  mit:

$$\Theta[F_{\epsilon,k}](x) := A^\top[F_{\epsilon,k}](x) \cdot (A[F_{\epsilon,k}](x)A^\top[F_{\epsilon,k}](x))^{-1}$$

ist, wohldefiniert. Mit  $A[F_{\epsilon,k}](x) \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+3) \times q}$  wird hierbei die Matrix bezeichnet, deren Zeilenvektoren die Ableitungsvektoren, erster und zweiter Ordnung, der Abbildung  $F_{\epsilon,k}$  sind. Nun soll die Operatornorm  $\|E[F_{\epsilon,k}]\|_{2,\alpha}$  abgeschätzt werden. Dafür wird verwendet, dass für  $x \in \mathbb{B}$  die Komponenten der Matrix

$$\Theta[F_{\epsilon,k}](x) = A^\top[F_{\epsilon,k}](x) \cdot (A[F_{\epsilon,k}](x)A^\top[F_{\epsilon,k}](x))^{-1}$$

unter Beachtung der Cramerschen Regel, Polynome von Ableitungen von  $F_{\epsilon,k}$ , in erster und zweiter Ordnung in  $x$ , dividiert durch  $\det((A[F_{\epsilon,k}](x)A^\top[F_{\epsilon,k}](x))^{-1})$ , sind. Ferner gilt, wegen  $F_{\epsilon,k} := F_k(\epsilon, \beta(\epsilon^{-1}x_1), x)$ , für  $m \in \mathbb{N}$  die Abschätzung:

$$|F_{\epsilon,k}|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} = \sum_{i=1}^q |[F_{\epsilon,k}]_i|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \leq C \cdot \sum_{i=1}^q |[F_{\epsilon,k}]_i|_{C^{m+1}(\overline{\mathbb{B}})} \leq C(k) \cdot \epsilon^{-(m+1)}$$

Daraus folgt, für beliebige  $\widehat{h} \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n)$  und  $f \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$ , die Abschätzung:

$$\left| E[F_{\epsilon,k}](\widehat{h}, f) \right|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \leq C(k) \cdot \epsilon^{-k_0} \cdot \left( |\widehat{h}|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n)} + |f|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \right)$$

für ein  $k_0 \in \mathbb{N}$ . Dies impliziert die Ungleichung:

$$\|E[F_{\epsilon,k}]\|_{2,\alpha} \leq C(k) \cdot \epsilon^{-k_0} \quad (6.6)$$

Unter der Annahme, dass  $k \geq 2k_0 + 3$  gilt, ergibt sich, mit (6.5) und (6.6), die Abschätzung:

$$\begin{aligned} & \|E[F_{\epsilon,k}]\|_{2,\alpha} \cdot |E[F_{\epsilon,k}](0, (\partial_i F_{\epsilon,k} \cdot \partial_j F_{\epsilon,k} - \partial_i F_0 \cdot \partial_j F_0 - {}^\varphi h_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n})|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ & \leq \|E[F_{\epsilon,k}]\|_{2,\alpha}^2 \cdot |(\partial_i F_{\epsilon,k} \cdot \partial_j F_{\epsilon,k} - \partial_i F_0 \cdot \partial_j F_0 - {}^\varphi h_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n})|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \\ & \leq C(k) \cdot \epsilon^{-2k_0+k-2} \leq C(k) \cdot \epsilon \end{aligned} \quad (6.7)$$

Nun wird eine Menge  $U_2 \subseteq \mathbb{B}$ , mit  $\overline{U}_1 \subseteq U_2$  und  $\overline{U}_2 \subseteq \mathbb{B}$ , gewählt. Mit der Abschätzung (6.7) existiert, unter der Annahme dass  $\epsilon \in (0, \epsilon_k]$  klein genug ist, mit (i) und Satz 5.1,

ein  $u \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  mit den Eigenschaften:

$$\partial_i(F_{\epsilon,k} + u) \cdot \partial_j(F_{\epsilon,k} + u) = \partial_i F_0 \cdot \partial_j F_0 + {}^\varphi h_{ij} \quad \text{für } 1 \leq i \leq j \leq n \quad (6.8)$$

und

$$\text{supp}(u) \subseteq U_2 \quad (6.9)$$

Die Abbildung  $u$  erfüllt mit (5.53) die Abschätzung:

$$\begin{aligned} & |u|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ & \leq C \cdot |E[F_{\epsilon,k}](0, (\partial_i F_{\epsilon,k} \cdot \partial_j F_{\epsilon,k} - \partial_i F_0 \cdot \partial_j F_0 - {}^\varphi h_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n})|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ & \leq C \cdot \|E[F_{\epsilon,k}]\|_{2,\alpha} \cdot |(\partial_i F_{\epsilon,k} \cdot \partial_j F_{\epsilon,k} - \partial_i F_0 \cdot \partial_j F_0 - {}^\varphi h_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \\ & \stackrel{(6.5), (6.6)}{\leq} C(k) \cdot \epsilon^{-k_0+k-2} \stackrel{k \geq 2k_0+3}{\leq} C(k) \cdot \epsilon^{k_0+1} \stackrel{k_0 \geq 0}{\leq} C(k) \cdot \epsilon \end{aligned} \quad (6.10)$$

Schließlich wird, unter Beachtung von (6.9) und (ii), die Funktion  $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$  mit:

$$F(x) := \begin{cases} F_{\epsilon,k}(\varphi(x)) + u(\varphi(x)) & \text{für } x \in \varphi^{-1}(\mathbb{B}) \\ F_0(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Mit (6.8) und (6.1) ist (6.2) erfüllt. Aus (iii) und (6.10) folgt die Abschätzung (6.4). Es bleibt noch zu zeigen, dass  $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$ , genau wie  $F_0 \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$ , eine freie Einbettung ist, sofern  $\epsilon \in (0, \epsilon_k]$  klein genug ist. Mit Satz 4.4 (i) ist  $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$ , für kleine  $\epsilon \in (0, \epsilon_k]$ , eine freie Abbildung, und damit insbesondere eine Immersion. Mit [Lee03, Proposition 7.4.] ist nur noch zu zeigen, dass  $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$  für kleine  $\epsilon \in (0, \epsilon_k]$  auch injektiv ist. Angenommen, es existieren  $x_1, x_2 \in M$  mit  $x_1 \neq x_2$ , so dass  $F(x_1) = F(x_2)$  gilt. Mit Satz 4.4 (ii) kann ausgeschlossen werden, dass  $x_1, x_2 \in U$  gilt. Weiterhin kann, wegen (6.9), die Möglichkeit  $x_1, x_2 \in M \setminus \varphi^{-1}(U_2)$  ebenfalls ausgeschlossen werden. Es bleibt noch der Fall zu untersuchen, dass  $x_1 \in M \setminus U$  und  $x_2 \in \varphi^{-1}(U_2)$  gilt. Da  $F_0 \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$  eine freie Einbettung ist, und  $\overline{U}_2 \subseteq \mathbb{B}$  gilt, ist:

$$\inf_{x \in M \setminus U, y \in \varphi^{-1}(U_2)} |F_0(x) - F_0(y)|_{\mathbb{R}^q} > 0$$

Ferner folgt mit (6.4), unter Verwendung der Dreiecksungleichung, für alle  $x, y \in M$ :

$$|F(x) - F(y)|_{\mathbb{R}^q} \geq |F_0(x) - F_0(y)|_{\mathbb{R}^q} - 2 \cdot C(k) \cdot \epsilon$$

Daraus ergibt sich, für hinreichend kleine  $\epsilon \in (0, \epsilon_k]$ , die Abschätzung, :

$$\inf_{x \in M \setminus U, y \in \varphi^{-1}(U_2)} |F(x) - F(y)|_{\mathbb{R}^q} > 0$$

womit die Injektivität der Abbildung  $F$  auf ganz  $M$  gezeigt ist. □

Satz 3.2 wird nun dafür verwendet, um Hauptsatz 1.1 zu zeigen.

## 6.2 Beweis der Hauptsätze

Die Aussage von Hauptsatz 1.1 ist:

**Hauptsatz** *Gegeben sei eine  $n$ -dimensionale geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(M, g)$ , und eine freie Einbettung  $F_0 \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$ , mit  $q \geq \frac{n}{2}(n+3) + 5$ , so dass  $g - F_0^*(g^{can}) \in \mathcal{T}^2(M)$  eine Riemannsche Metrik ist. Ferner sei ein  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  gegeben, dann existiert eine freie Einbettung  $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$ , so dass  $F^*(g^{can}) = g$  und:*

$$\max_{x \in M} |F(x) - F_0(x)|_{\mathbb{R}^q} \leq \delta \quad (6.11)$$

*gilt.*

*Beweis.* Mit Satz 3.1 existieren symmetrische kovariante 2-Tensorfelder  $h_1, \dots, h_m \in \mathcal{T}^2(M)$ , so dass:

$$h := g - F_0^*(g^{can}) = \sum_{i=1}^m h^{(i)} \quad (6.12)$$

und für jedes  $i \in \{1, \dots, m\}$  eine Karte  $(U_i, \varphi_i)$ , mit  $\varphi_i(U_i) = B_{1+\tau}(0)$ , für  $\tau > 0$ , und eine Abbildung  $a_i \in C^\infty(U_i)$ , mit  $\text{supp}(a_i) \subseteq \varphi^{-1}(\mathbb{B})$  existiert, so dass:

$$h^{(i)}(x) = \begin{cases} a_i^4(x) |\varphi_i dx^1|_x^2 & \text{für } x \in U_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. Mit dem, in Abschnitt 6.1 bewiesenen, Satz 2.1, können sukzessiv freie Einbettungen  $F_1, \dots, F_m \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$  konstruiert werden, so dass für jedes  $i \in \{1, \dots, m\}$  sowohl:

$$F_i^*(g^{can}) = F_{i-1}^*(g^{can}) + h^{(i)} \quad (6.13)$$

als auch:

$$\begin{aligned} \max_{x \in M} |F_i(x) - F_{i-1}(x)|_{\mathbb{R}^q} &\leq \frac{\delta}{m} \\ F_i(x) &= F_{i-1}(x) \quad \text{für alle } x \in M \setminus U_i \end{aligned} \tag{6.14}$$

gilt. Aus (6.12) und (6.13) folgt:

$$F_m^*(g^{can}) = F_0^*(g^{can}) + \sum_{i=1}^m h^{(i)} \stackrel{(6.12)}{=} g$$

Die Abbildung  $F := F_m \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$  ist also eine isometrische Einbettung der Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$ . Abschließend wird noch (6.11) gezeigt. Mit (6.14) gilt für jedes  $x \in M$  die Abschätzung:

$$|F(x) - F_0(x)|_{\mathbb{R}^q} \leq \sum_{i=1}^m |F_i(x) - F_{i-1}(x)|_{\mathbb{R}^q} \leq \delta$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Zusammen mit dem Satz 2.3 folgt Hauptsatz 1.2.

## 7 Isometrische Einbettung einer Familie von Riemannschen Mannigfaltigkeiten

In diesem, abschließenden Kapitel wird eine Möglichkeit beschrieben, wie Hauptsatz 1.2 und die in Kapitel 5 aufgeführten Resultate, dafür verwendet werden können, eine Familie von Riemannschen Mannigfaltigkeiten isometrisch in einen Vektorraum  $\mathbb{R}^q$  einzubetten. Dafür wird zunächst ein lokaler Einbettungssatz gezeigt, mit dessen Hilfe dann die gesamte Mannigfaltigkeit für eine kurze Zeit isometrisch eingebettet wird. Im gesamten Kapitel sei  $\alpha \in (0, 1)$  fest.

### 7.1 Konstruktion einer lokaler Lösung

Das folgende Lemma basiert direkt auf Lemma 5.13. Es besagt, dass  $\vartheta \in \mathbb{R}_{>0}$  so gewählt werden kann, dass zwei verschiedene Fixpunkte des Operators  $\Phi$ , zu jeweils gegebenem  $f \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$  und  $g \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$ , eine gewisse Stetigkeitsabschätzung erfüllen, falls die „Energien“ klein genug sind.

**Lemma 7.1** *Es sei  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$ , dann existiert ein  $\vartheta(n, \alpha, a) \in \mathbb{R}_{>0}$  mit der folgenden Eigenschaft: Ist eine freie Abbildung  $F_0 \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  gegeben, und sind  $f, g \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$  mit:*

$$\begin{aligned} \|E[F_0]\|_{2,\alpha} |E[F_0](0, f)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} &\leq \vartheta \\ \|E[F_0]\|_{2,\alpha} |E[F_0](0, g)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} &\leq \vartheta \end{aligned} \tag{7.1}$$

*dann erfüllen die, in Lemma 5.13 konstruierten, Abbildungen  $v^{(1)}, v^{(2)} \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , welche jeweils die Fixpunktgleichung:*

$$v^{(1)} = \Phi[F_0, a, f](v^{(1)}) \qquad v^{(2)} = \Phi[F_0, a, g](v^{(2)})$$


---

erfüllen, die Abschätzung:

$$|v^{(1)} - v^{(2)}|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \leq |E[F_0](0, f - g)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \quad (7.2)$$

*Beweis.* Es seien  $(v_k^{(1)})_{k \in \mathbb{N}}, (v_k^{(2)})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , die jeweiligen, in (5.48) konstruierten, Approximierenden. Das bedeutet konkret:

$$v_k^{(1)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } k = 0 \\ \Phi[F_0, a, f](v_{k-1}^{(1)}) & \text{falls } k \geq 1 \end{cases}$$

und:

$$v_k^{(2)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } k = 0 \\ \Phi[F_0, a, g](v_{k-1}^{(2)}) & \text{falls } k \geq 1 \end{cases}$$

Dann gilt für  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :

$$\begin{aligned} & |v_k^{(1)} - v_k^{(2)}|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} = |\Phi[F_0, a, f](v_{k-1}^{(1)}) - \Phi[F_0, a, g](v_{k-1}^{(2)})|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ & \stackrel{(5.21)}{=} \left| E[F_0] \left( P[a](v_{k-1}^{(1)}) - P[a](v_{k-1}^{(2)}), \frac{1}{2} \left[ (f - g) - Q[a](v_{k-1}^{(1)}) + Q[a](v_{k-1}^{(2)}) \right] \right) \right|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ & \leq \|E[F_0]\|_{2,\alpha} \cdot |P[a](v_{k-1}^{(1)}) - P[a](v_{k-1}^{(2)})|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n)} \\ & \quad + \|E[F_0]\|_{2,\alpha} \cdot |Q[a](v_{k-1}^{(1)}) - Q[a](v_{k-1}^{(2)})|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \\ & \quad + \frac{1}{2} |E[F_0](0, f - g)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ & \stackrel{(5.39)}{\leq} K(n, \alpha, a) \cdot \|E[F_0]\|_{2,\alpha} \cdot \left( |v_{k-1}^{(1)}|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + |v_{k-1}^{(2)}|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \right) \cdot |v_{k-1}^{(1)} - v_{k-1}^{(2)}|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ & \quad + \frac{1}{2} |E[F_0](0, f - g)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ & \stackrel{(5.49)}{\leq} K(n, \alpha, a) \cdot \|E[F_0]\|_{2,\alpha} \left( |E[F_0](0, f)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + |E[F_0](0, g)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \right) \\ & \quad \cdot |v_{k-1}^{(1)} - v_{k-1}^{(2)}|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + \frac{1}{2} |E[F_0](0, f - g)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Ist nun:

$$\|E[F_0]\|_{2,\alpha} \left( |E[F_0](0, f)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + |E[F_0](0, g)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \right) \leq \frac{1}{2K(n, \alpha, a)}$$



dann folgt aus (7.3) die Abschätzung:

$$|v_k^{(1)} - v_k^{(2)}|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \leq \frac{1}{2} \left( |v_{k-1}^{(1)} - v_{k-1}^{(2)}|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + |E[F_0](0, f - g)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \right)$$

woraus induktiv, wegen  $v_0^{(1)} = 0 = v_0^{(2)}$ , die Abschätzung:

$$|v_k^{(1)} - v_k^{(2)}|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \leq |E[F_0](0, f - g)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$  folgt. Die Behauptung ist damit bewiesen.  $\square$

**Satz 7.1** *Gegeben sei eine kompakte  $n$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit  $M$ , ferner sei eine Familie von Riemannschen Metriken  $(g(\cdot, t))_{t \in [0, T]} \subseteq \mathcal{T}^2(M)$  gegeben, so dass für jedes  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$  die Bedingung  $(\varphi g_{ij}(\cdot, \cdot))_{1 \leq i \leq j \leq n} \in C^\infty(\varphi(U) \times [0, T], \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$  gilt. Dann existiert, für  $q(n) := \max \left\{ \frac{n}{2}(n+5), \frac{n}{2}(n+3) + 5 \right\}$ , für jedes  $x \in M$  eine Umgebung  $U_x \subseteq M$  von  $x$ , ein  $T_x \in (0, T]$  und eine Familie von freien Einbettungen  $(F(\cdot, t))_{t \in [0, T_x]} \subseteq C^\infty(\overline{U}_x, \mathbb{R}^q)$ , so dass:*

$$F(\cdot, t)^*(g^{can}) = g(\cdot, t) \quad (7.4)$$

auf  $U_x$  für alle  $t \in [0, T_x]$  und:

$$F \in C^0(\overline{U}_x \times [0, T_x], \mathbb{R}^q) \quad (7.5)$$

gilt.

*Beweis.* Zunächst sei  $F_0 \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$  eine freie isometrische Einbettung der Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g(\cdot, 0))$ , gemäß Hauptsatz 1.2. Wähle ein  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$  mit  $\varphi(U) = B_{1+\tau}(0)$  und  $\varphi(x) = 0$ , sowie eine Funktion  $\psi \in C^\infty(\mathbb{B})$  so dass  $\psi|_{\overline{V}_x} \equiv 1$  für eine Umgebung  $V_x \subseteq \mathbb{B}$  von 0, und  $\text{supp}(\psi) \subseteq \mathbb{B}$  gilt. Die Abbildung  $\varphi^2 F_0|_{\mathbb{B}} \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  wird im Folgenden kurz mit  $F_0$  bezeichnet. Nun sei  $\widehat{g} \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$  mit:

$$\widehat{g}(x, t) := (\widehat{g}_{ij}(x, t))_{1 \leq i \leq j \leq n} = \psi(x) \cdot (\varphi g_{ij}(x, t) - \varphi g_{ij}(x, 0))_{1 \leq i \leq j \leq n} \quad (7.6)$$

Wähle dann ein  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$  mit  $a|_{\text{supp}(\psi)} \equiv 1$ , so dass  $a^2 \widehat{g} \equiv \widehat{g}$  gilt, dann sei  $\widehat{T}_x \in (0, T]$ , so dass für alle  $t \in [0, T_x]$  die Abschätzung:

$$\|E[F_0]\|_{2,\alpha} |E[F_0](0, \widehat{g}(\cdot, t))|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \leq \vartheta(n, \alpha, a) \quad (7.7)$$

mit dem in Satz 5.1, beziehungsweise Lemma 7.1, definierten  $\vartheta \in \mathbb{R}_{>0}$  erfüllt ist. Dann existiert für jedes  $t \in [0, T_x]$  ein  $v(\cdot, t) \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , so dass für  $u(\cdot, t) := a^2 v(\cdot, t) \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , für alle  $(x, t) \in \mathbb{B} \times [0, T_x]$ , und für jede Auswahl  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i \leq j$ , die Gleichung:

$$\begin{aligned} & \partial_i({}^\varphi F_0(x) + u(x, t)) \cdot \partial_j({}^\varphi F_0(x) + u(x, t)) \\ &= \partial_i {}^\varphi F_0(x) \cdot \partial_j {}^\varphi F_0(x) + \widehat{g}_{ij}(x, t) \\ &\stackrel{(7.6)}{=} {}^\varphi g_{ij}(x, 0) + \psi(x) \cdot ({}^\varphi g_{ij}(x, t) - {}^\varphi g_{ij}(x, 0)) \end{aligned} \quad (7.8)$$

erfüllt ist. Ferner sei für spätere Zwecke erwähnt, dass für jedes  $t \in [0, T_x]$  die Abbildung  $v(\cdot, t) \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , gemäß (5.48), durch die Folge  $(v_k(\cdot, t))_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  mit:

$$v_k(\cdot, t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k = 0 \\ \Phi[F_0, a, \widehat{g}(\cdot, t)](v_{k-1}(\cdot, t)) & \text{falls } k \geq 1 \end{cases} \quad (7.9)$$

im  $C^{2,\alpha}$ -Sinne approximiert wird. Mit (5.49) gilt die Abschätzung:

$$\max_{t \in [0, T_x]} |v_k(\cdot, t)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \leq \max_{t \in [0, T_x]} |E[F_0](0, \widehat{g}(\cdot, t))|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \quad (7.10)$$

Da  $\psi|_{\overline{V_x}} \equiv 1$  gilt, folgt für  $U_x := \varphi^{-1}(V_x)$  und  $(F(\cdot, t))_{t \in [0, T]} \subseteq C^\infty(U_x, \mathbb{R}^q)$  mit:

$$F(x, t) = F_0(x) + u(\varphi(x), t) \quad (7.11)$$

aus (7.8), unter Beachtung von (7.2), die Behauptung. □

## 7.2 Regularität der lokalen Lösung

Um die Regularität der, in Abschnitt 7.1 konstruierten, lokalen Lösung zu untersuchen, werden Eigenschaften der in (7.9) eingeführten Approximierenden untersucht. Dabei sind vor allem die Ableitungen in Zeitrichtung, sofern existent, von Interesse. Hierfür werden die in Abschnitt 5.4 gezeigten Abschätzungen für die Betrachtung von Zeitableitungen aufgearbeitet. Im Folgenden sei  $T \in \mathbb{R}_{>0}$  fest gewählt.

**Lemma 7.2** *Es sei  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$  dann gilt für  $v_1, v_2 \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}} \times [0, T], \mathbb{R}^q)$ :*

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [0, T]} |N_i[a](v_1(\cdot, t)) - N_i[a](v_2(\cdot, t))|_{C^{0, \alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ & \leq K(n, \alpha, a) \cdot \left( \max_{t \in [0, T]} |v_1(\cdot, t)|_{C^{2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + \max_{t \in [0, T]} |v_2(\cdot, t)|_{C^{2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \right) \\ & \quad \cdot \max_{t \in [0, T]} |v_1(\cdot, t) - v_2(\cdot, t)|_{C^{2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \end{aligned} \quad (7.12)$$

Für  $v \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}} \times [0, T], \mathbb{R}^q)$  und  $m, r \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [0, T]} |\partial_t^r N_i[a](v(\cdot, t))|_{C^{m, \alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ & \leq K(n, \alpha, a) \cdot \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \max_{t \in [0, T]} |\partial_t^s v(\cdot, t)|_{C^{m+2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \max_{t \in [0, T]} |\partial_t^{r-s} v(\cdot, t)|_{C^{2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ & \quad + C(n, m, \alpha, a) \cdot \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \max_{t \in [0, T]} |\partial_t^s v(\cdot, t)|_{C^{m+1, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \max_{t \in [0, T]} |\partial_t^{r-s} v(\cdot, t)|_{C^{m+1, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \end{aligned} \quad (7.13)$$

*Beweis.* Um (7.12) zu zeigen, kann die Ungleichung (5.33) in Lemma 5.8 auf feste Zeiten angewandt werden. Nun wird (7.13) gezeigt:

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [0, T]} |\partial_t^r N_i[a](v(\cdot, t))|_{C^{m, \alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ & \stackrel{(5.1)}{=} \max_{t \in [0, T]} |2\partial_i a \partial_t^r [\Delta v(\cdot, t) \cdot v(\cdot, t)] + a \partial_t^r [\Delta v(\cdot, t) \cdot \partial_i v(\cdot, t)]|_{C^{m, \alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ & = \max_{t \in [0, T]} \left| 2\partial_i a \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \Delta \partial_t^s v(\cdot, t) \cdot \partial_t^{r-s} v(\cdot, t) + a \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \Delta \partial_t^s v(\cdot, t) \cdot \partial_i \partial_t^{r-s} v(\cdot, t) \right|_{C^{m, \alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ & \leq \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \max_{t \in [0, T]} |2\partial_i a \Delta \partial_t^s v(\cdot, t) \cdot \partial_t^{r-s} v(\cdot, t)|_{C^{m, \alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ & \quad + \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \max_{t \in [0, T]} |a \Delta \partial_t^s v(\cdot, t) \cdot \partial_i \partial_t^{r-s} v(\cdot, t)|_{C^{m, \alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ & \stackrel{(A.14)}{\leq} \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} |2\partial_i a \Delta \partial_t^s v(\cdot, t)|_{C^{0, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |\partial_t^{r-s} v(\cdot, t)|_{C^{m, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ & \quad + \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \max_{t \in [0, T]} |2\partial_i a \Delta \partial_t^s v(\cdot, t)|_{C^{m, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \max_{t \in [0, T]} |\partial_t^{r-s} v(\cdot, t)|_{C^{0, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ & \quad + C_1(n, m, \alpha) \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \max_{t \in [0, T]} |2\partial_i a \Delta \partial_t^s v(\cdot, t)|_{C^{m-1, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \max_{t \in [0, T]} |\partial_t^{r-s} v(\cdot, t)|_{C^{m-1, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \max_{t \in [0, T]} |a \Delta \partial_t^s v(\cdot, t)|_{C^{0, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \max_{t \in [0, T]} |\partial_i \partial_t^{r-s} v(\cdot, t)|_{C^{m, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
& + \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \max_{t \in [0, T]} |a \Delta \partial_t^s v(\cdot, t)|_{C^{m, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \max_{t \in [0, T]} |\partial_i \partial_t^{r-s} v(\cdot, t)|_{C^{0, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
& + C_1(n, m, \alpha) \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \max_{t \in [0, T]} |a \Delta \partial_t^s v(\cdot, t)|_{C^{m-1, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \max_{t \in [0, T]} |\partial_i \partial_t^{r-s} v(\cdot, t)|_{C^{m-1, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
& \stackrel{(A.12)}{\leq} K(n, \alpha, a) \cdot \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \max_{t \in [0, T]} |\partial_t^s v(\cdot, t)|_{C^{m+2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \max_{t \in [0, T]} |\partial_t^{r-s} v(\cdot, t)|_{C^{2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
& + C(n, m, \alpha, a) \cdot \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \max_{t \in [0, T]} |\partial_t^s v(\cdot, t)|_{C^{m+1, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \max_{t \in [0, T]} |\partial_t^{r-s} v(\cdot, t)|_{C^{m+1, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}
\end{aligned}$$

□

Aus dem folgenden Lemma wird sich die Glattheit der Operatoren  $M_{ij}[a]$  aus (5.10), unter Berücksichtigung der neu eingeführten Zeitrichtung, ergeben.

**Lemma 7.3** *Für ein  $f \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}} \times [0, T])$  sei  $u: \mathbb{B} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , mit  $u(\cdot, t) \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}})$  für alle  $t \in [0, T]$ , die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung:*

$$\begin{cases} \Delta u(\cdot, t) = f(\cdot, t) & \text{auf } \mathbb{B} \\ u(\cdot, t) = 0 & \text{auf } \partial \mathbb{B} \end{cases} \quad (7.14)$$

auf  $\mathbb{B}$ , dann gilt:  $u \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}} \times [0, T])$ .

*Beweis.* Es seien  $\varrho \in (0, 1)$  sowie  $T_1, T_2 \in (0, T)$  mit  $T_1 < T_2$ . Für  $h \in (0, \max\{T_1, T - T_2\})$  sei  $\partial_{t,h} u \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}} \times [T_1, T_2])$  mit:

$$(\partial_{t,h} u)(x, t) := \frac{u(x, t+h) - u(x, t)}{h}$$

der **Differenzenquotient von  $u$  in  $t$ -Richtung zur Schrittweite  $h$** . Für  $h_1, \dots, h_r \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $\sum_{i=1}^r h_i < \max\{T_1, T - T_2\}$  folgt dann induktiv aus (7.14) für alle  $[T_1, T_2]$ :

$$\begin{cases} \Delta \partial_{t,h_1} \partial_{t,h_2} \dots \partial_{t,h_r} u(\cdot, t) = \partial_{t,h_1} \partial_{t,h_2} \dots \partial_{t,h_r} f(\cdot, t) & \text{auf } \mathbb{B} \\ \partial_{t,h_1} \partial_{t,h_2} \dots \partial_{t,h_r} u(\cdot, t) = 0 & \text{auf } \partial \mathbb{B} \end{cases} \quad (7.15)$$

Für einen beliebigen Multiindex  $s \in \mathbb{N}^n$ , mit  $|s| = m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , folgt dann aus (7.15):

$$\begin{aligned}
& \int_{T_1}^{T_2} \int_{B_\varrho(0)} |\partial_{t,h_1} \partial_{t,h_2} \dots \partial_{t,h_r} \partial^s u(x, t)|^2 dx dt \\
&= \int_{T_1}^{T_2} \int_{B_\varrho(0)} |\partial^s \partial_{t,h_1} \partial_{t,h_2} \dots \partial_{t,h_r} u(x, t)|^2 dx dt \\
&\leq \int_{T_1}^{T_2} \int_{\mathbb{B}} |\partial_{t,h_1} \partial_{t,h_2} \dots \partial_{t,h_r} u(\cdot, t)|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})}^2 dx dt \\
&= C(n) \cdot \int_{T_1}^{T_2} |\partial_{t,h_1} \partial_{t,h_2} \dots \partial_{t,h_r} u(\cdot, t)|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})}^2 dt \\
&\leq C(n) \cdot (T_2 - T_1) \cdot \max_{t \in [T_1, T_2]} |\partial_{t,h_1} \partial_{t,h_2} \dots \partial_{t,h_r} u(\cdot, t)|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})}^2 \\
&\stackrel{(5.25)}{\leq} C(n, m, \alpha, T) \cdot \max_{t \in [T_1, T_2]} |\partial_{t,h_1} \partial_{t,h_2} \dots \partial_{t,h_r} f(\cdot, t)|_{C^{m-2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})}^2
\end{aligned}$$

Mit Lemma 7.23 und Lemma 7.24 in [GT01] folgt aus der Glattheit von  $f$  die Existenz einer schwachen Ableitung von  $u$  beliebiger Ordnung. Mit dem Einbettungssatz von Sobolev [GT01, Theorem 7.10] folgt die Behauptung.  $\square$

**Lemma 7.4** *Es sei  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$  dann gilt für  $v_1, v_2 \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}} \times [0, T], \mathbb{R}^q)$ :*

$$\begin{aligned}
& \max_{t \in [0, T]} |M_{ij}[a](v_1(\cdot, t)) - M_{ij}[a](v_2(\cdot, t))|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
&\leq K(n, \alpha, a) \cdot \left( \max_{t \in [0, T]} |v_1(\cdot, t)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + \max_{t \in [0, T]} |v_2(\cdot, t)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \right) \\
&\quad \cdot \max_{t \in [0, T]} |v_1(\cdot, t) - v_2(\cdot, t)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Für  $v \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}} \times [0, T], \mathbb{R}^q)$  und  $m, r \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\begin{aligned}
& \max_{t \in [0, T]} |\partial_t^r M_{ij}[a](v(\cdot, t))|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\
&\leq K(n, \alpha, a) \cdot \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \max_{t \in [0, T]} |\partial_t^s v(\cdot, t)|_{C^{m+2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \max_{t \in [0, T]} |\partial_t^{r-s} v(\cdot, t)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
&\quad + C(n, m, \alpha, a) \cdot \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \max_{t \in [0, T]} |\partial_t^s v(\cdot, t)|_{C^{m+1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \max_{t \in [0, T]} |\partial_t^{r-s} v(\cdot, t)|_{C^{m+1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}
\end{aligned} \tag{7.17}$$

*Beweis.* Um (7.16) zu zeigen, kann, analog zu Lemma 7.2, die Ungleichung (5.35) in

Lemma 5.9 auf feste Zeiten angewandt werden. Unter Beachtung der Definition von  $M_{ij}[a]$  in (5.10), als Summe der Operatoren  $L_{ij}[a]$  und  $R_{ij}[a]$  aus Lemma 5.1 und Lemma 5.2, ergibt sich die zu zeigende Abschätzung (7.17) einerseits aus den Abschätzungen (5.25) und (5.29) für den  $L_{ij}[a]$ -Anteil und andererseits analog zum Beweis von (7.13) für den  $R_{ij}[a]$ -Anteil.  $\square$

Aus Lemma 7.1 und Lemma 7.3 folgt, mit den Definitionen in (5.19) und (5.20), analog zum Beweis von Lemma 5.10:

**Lemma 7.5** *Es sei  $a \in C_0^\infty(\mathbb{B})$  dann gilt für  $v_1, v_2 \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}} \times [0, T], \mathbb{R}^q)$ , dann gilt:*

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [0, T]} \left( |P[a](v_1(\cdot, t)) - P[a](v_2(\cdot, t))|_{C^{2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n)} \right. \\ & \quad \left. + |Q[a](v_1(\cdot, t)) - Q[a](v_2(\cdot, t))|_{C^{2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \right) \\ & \leq K(n, \alpha, a) \cdot \left( \max_{t \in [0, T]} |v_1(\cdot, t)|_{C^{2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + \max_{t \in [0, T]} |v_2(\cdot, t)|_{C^{2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \right) \\ & \quad \cdot \max_{t \in [0, T]} |v_1(\cdot, t) - v_2(\cdot, t)|_{C^{2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \end{aligned} \quad (7.18)$$

Für  $v \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}} \times [0, T], \mathbb{R}^q)$  und  $m, r \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [0, T]} \left( |\partial_t^r P[a](v(\cdot, t))|_{C^{m, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n)} + |\partial_t^r Q[a](v(\cdot, t))|_{C^{m, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \right) \\ & \leq K(n, \alpha, a) \cdot \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \max_{t \in [0, T]} |\partial_t^s v(\cdot, t)|_{C^{m, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \max_{t \in [0, T]} |\partial_t^{r-s} v(\cdot, t)|_{C^{2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ & \quad + C(n, m, \alpha, a) \cdot \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \max_{t \in [0, T]} |\partial_t^s v(\cdot, t)|_{C^{m-1, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \max_{t \in [0, T]} |\partial_t^{r-s} v(\cdot, t)|_{C^{m-1, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \end{aligned} \quad (7.19)$$

Die folgenden beiden Lemmata können genau wie Lemma 5.11 und 5.12 gezeigt werden.

**Lemma 7.6** *Es sei  $F_0 \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  eine beliebige freie Abbildung und  $r \in \mathbb{N}$ . Dann gilt, für beliebige  $h \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}} \times [0, T], \mathbb{R}^n)$ ,  $f \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}} \times [0, T], \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$ , für den Operator  $E[F_0]$  die Abschätzung:*

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [0, T]} |\partial_t^r E[F_0](h(\cdot, t), f(\cdot, t))|_{C^{m, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ & \leq C(n, q, m, \alpha, F_0) \cdot \max_{t \in [0, T]} \left( |\partial_t^r h(\cdot, t)|_{C^{m, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n)} + |\partial_t^r f(\cdot, t)|_{C^{m, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \right) \end{aligned} \quad (7.20)$$

**Lemma 7.7** *Es sei  $F_0 \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  eine beliebige freie Abbildung und  $r \in \mathbb{N}$ . Dann gilt für den Operator  $E[F_0]$  für  $m \geq 3$  die Abschätzung:*

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [0, T]} |\partial_t^r E[F_0](h(\cdot, t), f(\cdot, t))|_{C^{m, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ & \leq \|E[F_0]\|_{2, \alpha} \cdot \max_{t \in [0, T]} \left( |\partial_t^r h(\cdot, t)|_{C^{m, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n)} + |\partial_t^r f(\cdot, t)|_{C^{m, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \right) \\ & \quad + C(n, q, m, \alpha, F_0) \cdot \max_{t \in [0, T]} \left( |\partial_t^r h(\cdot, t)|_{C^{m-1, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n)} + |\partial_t^r f(\cdot, t)|_{C^{m-1, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \right) \end{aligned} \quad (7.21)$$

für beliebige  $h \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}} \times [0, T], \mathbb{R}^n)$ ,  $f \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}} \times [0, T], \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$ .

**Satz 7.2** *In der Situation von Satz 7.1 existiert ein  $\hat{T}_x \in (0, T_x]$ , so dass für die, in diesem Satz konstruierte, Lösung  $(F(\cdot, t))_{t \in [0, \hat{T}_x]} \subseteq C^\infty(\overline{U}_x, \mathbb{R}^q)$  die Eigenschaft:*

$$F \in C^\infty(\overline{U}_x \times [0, \hat{T}_x], \mathbb{R}^q)$$

*gilt.*

*Beweis.* Mit Lemma 7.3 ist die, in (7.9) definierte, Folgen von Approximationen  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  glatt, das heißt  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\overline{\mathbb{B}} \times [0, T_x], \mathbb{R}^q)$ . Hierbei sei erneut, unter Beachtung der Glattheit der Metrik  $g$ , auf die Definition des Operators  $\Phi[F_0, a, \hat{g}]$  in (5.21), und die Definition der Operatoren  $P$  und  $Q$  in (5.19) und (5.20) verwiesen. Um zu zeigen, dass  $v \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}} \times [0, \hat{T}_x], \mathbb{R}^q)$  gilt, wird gezeigt, dass nach eventueller Verkleinerung von  $\hat{T}_x \in (0, T_x]$  für alle  $r \in \mathbb{N}$  und  $s \in \mathbb{N}$  eine Konstante  $C(r, s) \in \mathbb{R}_{>0}$  existiert, so dass für alle  $k \in \mathbb{N}$  die Abschätzung:

$$\|\partial_t^r \partial^s v_k\|_{C^0(\overline{\mathbb{B}} \times [0, \hat{T}_x], \mathbb{R}^q)} \leq C(r, s) \quad (7.22)$$

gilt. Die Konstante  $C(r, s)$  soll dabei insbesondere nicht von  $k$  abhängen. Es sei  $r \in \mathbb{N}$  dann folgt aus (7.9), (5.21), (7.20), (7.19) und (7.10) für alle  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  die Abschätzung:

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [0, \hat{T}_x]} |\partial_t^r v_k(\cdot, t)|_{C^{2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ & \leq 2 \cdot K_1(n, \alpha, a) \cdot \|E[F_0]\|_{2, \alpha} \cdot \max_{t \in [0, \hat{T}_x]} |E[F_0](0, \hat{g}(\cdot, t))|_{C^{2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \max_{t \in [0, \hat{T}_x]} |\partial_t^r v_{k-1}(\cdot, t)|_{C^{2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ & \quad + K_1(n, \alpha, a) \cdot \|E[F_0]\|_{2, \alpha} \\ & \quad \cdot \sum_{s=1}^{r-1} \binom{r}{s} \max_{t \in [0, \hat{T}_x]} |\partial_t^s v_{k-1}(\cdot, t)|_{C^{2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \max_{t \in [0, \hat{T}_x]} |\partial_t^{r-s} v_{k-1}(\cdot, t)|_{C^{2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \end{aligned} \quad (7.23)$$

$$+ \frac{1}{2} \max_{t \in [0, \hat{T}_x]} |E[F_0](0, \partial_t^r \hat{g}(\cdot, t))|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}$$

Unter der Annahme, dass  $\hat{T}_x \in (0, T_x]$  so klein gewählt ist, dass:

$$\|E[F_0]\|_{2,\alpha} \cdot \max_{t \in [0, \hat{T}_x]} |E[F_0](0, \hat{g}(\cdot, t))|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \leq \frac{1}{4K_1(n, \alpha, a)}$$

gilt, folgt aus (7.23) die Abschätzung:

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [0, \hat{T}_x]} |\partial_t^r v_k(\cdot, t)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ & \leq \frac{1}{2} \left( \max_{t \in [0, \hat{T}_x]} |\partial_t^r v_{k-1}(\cdot, t)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + \max_{t \in [0, \hat{T}_x]} |E[F_0](0, \partial_t^r \hat{g}(\cdot, t))|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \right) \\ & \quad + K_1(n, \alpha, a) \cdot \|E[F_0]\|_{2,\alpha} \\ & \quad \cdot \sum_{s=1}^{r-1} \binom{r}{s} \max_{t \in [0, \hat{T}_x]} |\partial_t^s v_{k-1}(\cdot, t)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \max_{t \in [0, \hat{T}_x]} |\partial_t^{r-s} v_{k-1}(\cdot, t)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \end{aligned}$$

und es folgt per Induktion über  $r \in \mathbb{N}$  mit Lemma C.4 die Abschätzung (7.22) für alle  $|s| \leq 2$  und  $r \in \mathbb{N}$ . Insbesondere existiert mit dem Satz von Arzelà-Ascoli eine Teilfolge von  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , die auf  $\overline{\mathbb{B}} \times [0, T_x]$  gleichmäßig gegen ein  $\hat{v} \in C^0(\overline{\mathbb{B}} \times [0, T], \mathbb{R})$  konvergiert. Da für feste Zeiten  $t \in [0, T_x]$  die Folge  $(v_k(\cdot, t))_{k \in \mathbb{N}}$  im  $C^{2,\alpha}$ -Sinne gegen  $v(\cdot, t)$  konvergiert, muss aber  $\hat{v} \equiv v$  gelten.

Nun sei  $m \geq 3$ , unter der Annahme, dass die Abschätzung (7.22) bereits für  $|s| \leq m-1$  und alle  $r \in \mathbb{N}$  gilt. Dann folgt aus (7.9), (5.21), (7.21) und (7.19) für alle  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  und  $r \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [0, \hat{T}_x]} |\partial_t^r v_k(\cdot, t)|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ & \leq K_2(n, \alpha, a) \cdot \|E[F_0]\|_{2,\alpha} \max_{t \in [0, \hat{T}_x]} |\partial_t^r v_{k-1}(\cdot, t)|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \max_{t \in [0, \hat{T}_x]} |v_{k-1}(\cdot, t)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ & \quad + K_2(n, \alpha, a) \cdot \|E[F_0]\|_{2,\alpha} \cdot \sum_{s=0}^{r-1} \max_{t \in [0, \hat{T}_x]} |\partial_t^s v_{k-1}(\cdot, t)|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \max_{t \in [0, \hat{T}_x]} |\partial_t^{r-s} v_{k-1}(\cdot, t)|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ & \quad + C_1(n, m, \alpha, F_0) \cdot \sum_{s=0}^r \max_{t \in [0, \hat{T}_x]} |\partial_t^s v_{k-1}(\cdot, t)|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \max_{t \in [0, \hat{T}_x]} |\partial_t^{r-s} v_{k-1}(\cdot, t)|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ & \quad + \frac{1}{2} \max_{t \in [0, \hat{T}_x]} |E[F_0](0, \partial_t^r \hat{g}(\cdot, t))|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \end{aligned} \tag{7.24}$$



Mit (7.10) und (7.22) folgt aus (7.24), zusammen mit der Induktionsvoraussetzung, die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
& \max_{t \in [0, \hat{T}_x]} |\partial_t^r v_k(\cdot, t)|_{C^{m, \alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} \\
& \leq K_2(n, \alpha, a) \cdot \|E[F_0]\|_{2, \alpha} \max_{t \in [0, T_x]} |E[F_0](0, \hat{g}(\cdot, t))|_{C^{2, \alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} \max_{t \in [0, \hat{T}_x]} |\partial_t^r v_{k-1}(\cdot, t)|_{C^{m, \alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} \\
& \quad + C_2 \left( n, \alpha, a, r, m, F_0, \hat{T}_x, \hat{g} \right) \cdot \sum_{s=0}^{r-1} \max_{t \in [0, \hat{T}_x]} |\partial_t^s v_{k-1}(\cdot, t)|_{C^{m, \alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} \\
& \quad + C_3 \left( n, \alpha, a, r, m, F_0, \hat{T}_x, \hat{g} \right) + \frac{1}{2} \max_{t \in [0, \hat{T}_x]} |E[F_0](0, \partial_t^r \hat{g}(\cdot, t))|_{C^{m, \alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)}
\end{aligned} \tag{7.25}$$

Falls nun  $\hat{T}_x \in (0, T_x]$  so klein gewählt ist, dass für alle  $t \in [0, \hat{T}_x]$  die Abschätzung:

$$\|E[F_0]\|_{2, \alpha} \max_{t \in [0, T_x]} |E[F_0](0, \hat{g}(\cdot, t))|_{C^{2, \alpha}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)} \leq \frac{1}{2K_2(n, \alpha, a)}$$

erfüllt ist, dann folgt aus (7.25), per Induktion über  $r \in \mathbb{N}$ , die Abschätzung (7.22) für  $|s| = m$  und alle  $r \in \mathbb{N}$ . □

## 7.3 Konstruktion der globalen Einbettung

Die lokalen Resultate aus den ersten beiden Abschnitten dieses Kapitels werden nun zu einem globalen Satz ausgebaut:

**Satz 7.3** *Gegeben sei eine kompakte  $n$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit  $M$ , ferner sei eine Familie von Riemannschen Metriken  $(g(\cdot, t))_{t \in [0, T]} \subseteq \mathcal{T}^2(M)$  gegeben, so dass für jedes  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$  die Bedingung  $(\varphi g_{ij}(\cdot, \cdot))_{1 \leq i \leq j \leq n} \in C^\infty(\varphi(U) \times [0, T], \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$  gilt. Dann existiert, für  $q(n) := \max \left\{ \frac{n}{2}(n+5), \frac{n}{2}(n+3) + 5 \right\}$  ein  $\hat{T} \in (0, T]$ , und eine Familie von freien Einbettungen  $(F(\cdot, t))_{t \in [0, \hat{T}]} \subseteq C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$ , mit  $F \in C^\infty(M \times [0, T], \mathbb{R}^q)$ , so dass für alle  $t \in [0, \hat{T}]$  die Gleichung:*

$$F(\cdot, t)^*(g^{can}) = g(\cdot, t)$$

auf  $M$  gilt.

*Beweis.* Es seien  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{1 \leq i \leq m} \subseteq \mathcal{A}$  Karten, mit  $\varphi_i(U_i) = B_{1+\tau}(0)$  für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$  für ein festes  $\tau \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass  $M = \bigcup_{i=1}^m \varphi_i^{-1}(\mathbb{B})$  gilt. Ferner seien  $\{\psi_i\}_{1 \leq i \leq m} \subseteq$

$C^\infty(M)$  mit  $\text{supp}(\psi_i) \subseteq \varphi_i^{-1}(\mathbb{B})$ , für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$  und  $\sum_{i=1}^m \psi_i \equiv 1$ , wie in [Lee03, Theorem 2.25] gewählt. Dann gilt für jedes  $(x, t) \in M \times [0, T]$  die Gleichung:

$$g(x, t) = g(x, 0) + \underbrace{g(x, t) - g(x, 0)}_{=: \widehat{g}^{(i)}(x, t)} = g(x, 0) + \sum_{i=1}^m \psi_i [g(x, t) - g(x, 0)] \quad (7.26)$$

Gemäß Hauptsatz 1.2 wird zunächst, genau wie in Satz 7.1, eine freie isometrische Einbettung  $F_0 \in C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$  der Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g(\cdot, 0))$  gewählt. Mit der Methode aus Satz 7.1 kann, unter Beachtung der Regularitätsbetrachtungen aus Abschnitt 7.2, für ein  $T_1 \in (0, T]$  eine Familie von freien Einbettungen  $F_1 \in C^\infty(M \times [0, T_1])$  konstruiert werden, so dass für jedes  $t \in [0, T_1]$  auf ganz  $M$  die Gleichung:

$$F_1(\cdot, t)^*(g^{can}) = g(\cdot, 0) + \widehat{g}^{(1)}(\cdot, t) \quad (7.27)$$

erfüllt ist. Diese Abbildung wird, wie in (7.22), über die Bildungsvorschrift:

$$F_1(x, t) := \begin{cases} F_0(x) + u^{(1)}(\varphi_1(x), t) & \text{falls } x \in U_1 \\ F_0(x) & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.28)$$

wobei  $u^{(1)} \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}} \times [0, T_1], \mathbb{R}^q)$  eine Abbildung mit  $\text{supp}(u^{(1)}(\cdot, t)) \subseteq \mathbb{B}$  für alle  $t \in [0, T_1]$  ist, bestimmt. Im Folgenden wird, für feste  $t \in [0, T_1]$ , die Abbildung  $\varphi^2 F_1(\cdot, t)|_{\mathbb{B}} \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  ebenfalls mit  $F_1(\cdot, t)$  bezeichnet. Es sei  $a_2 \in C_0^\infty(\mathbb{B})$  eine Abbildung, so dass  $a_2|_{\text{supp}(\psi_2 \circ \varphi_2^{-1})} \equiv 1$  erfüllt ist, dann kann  $T_2 \in (0, T_1]$  so gewählt werden, dass für alle  $t \in [0, T_2]$  die Abschätzung:

$$\max_{t \in [0, T_2]} \|E[F_1(\cdot, t)]\|_{2, \alpha} \max_{t \in [0, T_2]} |E[F_1(\cdot, t)](0, \varphi^2 \widehat{g}^{(2)}(\cdot, t))|_{C^{2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \leq \vartheta(n, \alpha, a_2)$$

mit dem in Satz 5.1 definierten  $\vartheta \in \mathbb{R}_{>0}$ , erfüllt ist. Dann existiert für jedes  $t \in [0, T_2]$  ein  $v^{(2)}(\cdot, t) \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , so dass für  $u^{(2)}(\cdot, t) := a_2^2 v^{(2)}(\cdot, t) \in C_0^\infty(\mathbb{B}, \mathbb{R}^q)$  für alle  $x \in \mathbb{B}$ , und für jedes  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i \leq j$ , die Gleichung:

$$\begin{aligned} & \partial_i(F_1(x, t) + u^{(2)}(x, t)) \cdot \partial_j(F_1(x, t) + u^{(2)}(x, t)) \\ &= \partial_i F_1(x, t) \cdot \partial_j F_1(x, t) + \varphi^2 \widehat{g}_{ij}^{(2)}(x, t) \\ &\stackrel{(7.27)}{=} \varphi^2 g_{ij}(x, 0) + \varphi^2 \widehat{g}_{ij}^{(1)}(x, t) + \varphi^2 \widehat{g}_{ij}^{(2)}(x, t) \end{aligned} \quad (7.29)$$

erfüllt ist. Für jedes  $t \in [0, T_2]$  wird die Abbildung  $v^{(2)}(\cdot, t) \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ , gemäß (5.48),

durch die Folge:  $(v_k^{(2)}(\cdot, t))_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  mit:

$$v_k^{(2)}(\cdot, t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k = 0 \\ \Phi[F_1(\cdot, t), a_2, \varphi_2 \widehat{g}^{(2)}(\cdot, t)](v_{k-1}^{(2)}(\cdot, t)) & \text{falls } k \geq 1 \end{cases} \quad (7.30)$$

im  $C^{2,\alpha}$ -Sinne approximiert wird. Mit Lemma 7.3 gilt, unter Beachtung der Glattheit der Metrik  $g$ , der Definition des Operators  $\Phi[F_1(\cdot, t), a_2, \varphi_2 \widehat{g}^{(2)}(\cdot, t)]$  in (5.21), sowie der Definition der Operatoren  $P$  und  $Q$  in (5.19) und (5.20), die Aussage  $(v_k^{(2)})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\overline{\mathbb{B}} \times [0, T_2], \mathbb{R}^q)$ . Mit (5.49) gilt die Abschätzung:

$$\max_{t \in [0, T_2]} \left| v_k^{(2)}(\cdot, t) \right|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \leq \max_{t \in [0, T_2]} \left| E[F_1(\cdot, t)](0, \varphi_2 \widehat{g}^{(2)}(\cdot, t)) \right|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \quad (7.31)$$

Definiere nun  $(F_2(\cdot, t))_{t \in [0, T_2]} \subseteq C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$  wie folgt:

$$F_2(x, t) := \begin{cases} F_1(x, t) + u^{(2)}(\varphi_2(x), t) & \text{falls } x \in U_2 \\ F_1(x, t) & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.32)$$

Dann ist mit (7.29) für jedes  $t \in [0, T_2]$  die Gleichung:

$$F_2(\cdot, t)^*(g^{can}) = g(\cdot, 0) + \widehat{g}^{(1)}(\cdot, t) + \widehat{g}^{(2)}(\cdot, t)$$

erfüllt. Es wird gezeigt, dass, nach eventueller Verkleinerung von  $T_2 \in (0, T_1]$ , die Aussage  $F_2 \in C^\infty(M \times [0, T_2], \mathbb{R}^q)$  gilt. Dazu wird wieder gezeigt, dass für jedes  $r \in \mathbb{N}$  und  $s \in \mathbb{N}^n$  eine Konstante  $C(r, s) \in \mathbb{R}_{>0}$  existiert, so dass für alle  $k \in \mathbb{N}$  die Abschätzung:

$$\left\| \partial_t^r \partial^s v_k^{(2)} \right\|_{C^0(\overline{\mathbb{B}} \times [0, T_2], \mathbb{R}^q)} \leq C(r, s) \quad (7.33)$$

gilt, wobei die Konstante  $C$  nicht von  $k$  abhängt. Dabei ist nun die Zeitabhängigkeit des Operators  $E[F_1(\cdot, t)]$  zu beachten. Im Folgenden ist für  $t \in [0, T_2]$ :

$$\partial_t^r E[F_1(\cdot, t)] : C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n) \times C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)}) \longrightarrow C^\infty(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$$

$$\partial_t^r E[F_1(\cdot, t)](h, f)(x) := \partial_t^r \Theta[F_1(\cdot, t)](x) \cdot \begin{pmatrix} h(x) \\ f(x) \end{pmatrix}$$

wobei  $\Theta[F_1(\cdot, t)]$  in (5.16) definiert worden ist. Die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T_2]} |\partial_t^r E[F_1(\cdot, t)](h, f)|_{C^{m, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ \leq C(n, m, \alpha, r, F_1, T_2) \cdot \left( |h|_{C^{m, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^n)} + |f|_{C^{m, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})} \right) \end{aligned} \quad (7.34)$$

ist analog zu Lemma 5.11 zu beweisen. Für die folgenden Abschätzungen sei erwähnt, dass für  $h \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}} \times [0, T_2], \mathbb{R}^n)$  und  $f \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}} \times [0, T_2], \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)})$  für alle  $t \in [0, T_2]$  die Gleichung:

$$\partial_t^r (E[F_1(\cdot, t)](h(\cdot, t), f(\cdot, t))) = \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \partial_t^s E[F_1(\cdot, t)] (\partial_t^{r-s} h(\cdot, t), \partial_t^{r-s} f(\cdot, t)) \quad (7.35)$$

gilt. Dann ist für  $r \in \mathbb{N}$  und  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , unter Beachtung von (7.30), (5.21), (7.35), (7.34), (7.19) und (7.31):

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T_2]} \left| \partial_t^r v_k^{(2)}(\cdot, t) \right|_{C^{2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ \leq 2 \cdot K_1(n, \alpha, a_2) \cdot \|E[F_1(\cdot, t)]\|_{2, \alpha} \cdot \max_{t \in [0, T_2]} \left| E[F_1(\cdot, t)](0, \varphi^2 \widehat{g}^{(2)}(\cdot, t)) \right|_{C^{2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ \cdot \max_{t \in [0, T_2]} \left| \partial_t^r v_{k-1}^{(2)}(\cdot, t) \right|_{C^{2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ + K_1(n, \alpha, a_2) \cdot \max_{t \in [0, T_2]} \|E[F_1(\cdot, t)]\|_{2, \alpha} \\ \cdot \sum_{s=1}^{r-1} \binom{r}{s} \max_{t \in [0, T_2]} \left| \partial_t^s v_{k-1}^{(2)}(\cdot, t) \right|_{C^{2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \max_{t \in [0, T_2]} \left| \partial_t^{r-s} v_{k-1}^{(2)}(\cdot, t) \right|_{C^{2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ + K_1(n, \alpha, a_2) \cdot \sum_{s=1}^r \max_{t \in [0, T_2]} \|\partial_t^s E[F_1(\cdot, t)]\|_{2, \alpha} \\ \cdot \sum_{\widehat{s}=0}^{r-s} \binom{r-s}{\widehat{s}} \max_{t \in [0, T_2]} \left| \partial_t^{\widehat{s}} v_{k-1}^{(2)}(\cdot, t) \right|_{C^{2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \max_{t \in [0, T_2]} \left| \partial_t^{r-s-\widehat{s}} v_{k-1}^{(2)}(\cdot, t) \right|_{C^{2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ + C(n, \alpha, a_2, r, F_1, T_2, \varphi^2 \widehat{g}^{(2)}) \end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass  $T_2 \in (0, T_1]$  so klein ist, dass:

$$\max_{t \in [0, T_2]} \|E[F_1(\cdot, t)]\|_{2, \alpha} \max_{t \in [0, T_2]} \left| E[F_1(\cdot, t)](0, \varphi^2 \widehat{g}^{(2)}(\cdot, t)) \right|_{C^{2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \leq \frac{1}{4K_1(n, \alpha, a_2)}$$

gilt, folgt die Abschätzung mit Lemma C.4, per Induktion über  $r \in \mathbb{N}$ , die Abschätzung (7.33) für  $|s| \leq 2$  und beliebige  $r \in \mathbb{N}$ . Nun sei  $m \geq 3$ , unter der Annahme, dass die

Abschätzung (7.33) bereits für  $|s| \leq m-1$  und alle  $r \in \mathbb{N}$  gezeigt ist. Dann gilt für  $r \in \mathbb{N}$  und  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  unter Beachtung von (7.30), (5.21), (7.35), (7.20), (7.19) und (7.34):

$$\begin{aligned}
& \max_{t \in [0, T_2]} \left| \partial_t^r v_k^{(2)}(\cdot, t) \right|_{C^{m, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
& \leq K_2(n, \alpha, a_2) \cdot \max_{t \in [0, T_2]} \|E[F_1(\cdot, t)]\|_{2, \alpha} \max_{t \in [0, T]} \cdot |E[F_1(\cdot, t)](0, \varphi_2 \widehat{g}^{(2)}(\cdot, t))|_{C^{2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
& \quad \cdot \max_{t \in [0, T_2]} \left| \partial_t^r v_{k-1}^{(2)}(\cdot, t) \right|_{C^{m, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
& \quad + C(n, m, \alpha, a_2, r, F_1, T_2, \varphi_2 \widehat{g}^{(2)}) \\
& \quad \cdot \sum_{s=0}^{r-1} \max_{t \in [0, T_2]} \left| \partial_t^s v_{k-1}^{(2)}(\cdot, t) \right|_{C^{m, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \max_{t \in [0, T_2]} \left| \partial_t^{r-s} v_{k-1}^{(2)}(\cdot, t) \right|_{C^{2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
& \quad + C(n, m, \alpha, a_2, r, F_1, T_2, \varphi_2 \widehat{g}^{(2)}) \\
& \quad \cdot \sum_{s=0}^r \max_{t \in [0, T_2]} \left| \partial_t^s v_{k-1}^{(2)}(\cdot, t) \right|_{C^{m-1, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \max_{t \in [0, T_2]} \left| \partial_t^{r-s} v_{k-1}^{(2)}(\cdot, t) \right|_{C^{m-1, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\
& \quad + C(n, m, \alpha, a_2, r, F_1, T_2, \varphi_2 \widehat{g}^{(2)})
\end{aligned}$$

Sei nun  $T_2 \in (0, T_1]$  klein genug, so dass:

$$\max_{t \in [0, T_2]} \|E[F_1(\cdot, t)]\|_{2, \alpha} \max_{t \in [0, T]} |E[F_1(\cdot, t)](0, \varphi_2 \widehat{g}^{(2)}(\cdot, t))|_{C^{2, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \leq \frac{1}{2K_3(n, \alpha, a_2)}$$

gilt, dann folgt mit Lemma C.4, zusammen mit der Induktionsvoraussetzung, die Abschätzung (7.33) für  $|s| = m$  und alle  $r \in \mathbb{N}$ . Ist  $F_2(\cdot, t)$  für ein  $t \in [0, T_2]$  keine freie Einbettung, so kann dies aber mit Satz 4.4, unter Beachtung der Abschätzung (5.53), durch eine Verkleinerung von  $T_2$  vermieden werden. Dann kann die soeben beschriebene Konstruktion (7.32) iterativ auf die anderen Karten  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{3 \leq i \leq m} \subseteq \mathcal{A}$  angewandt werden, und es ergibt sich nach endlich vielen Schritten, unter Beachtung der Gleichung (7.26), die Behauptung.

□

# A Funktionenräume

In diesem Kapitel werden die, in der Arbeit verwendeten, Funktionenräume definiert und einige Abschätzungen bewiesen, welche voviegend in Kapitel 5 und Kapitel 7 verwendet werden.

**Definition A.1** *Es sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $m \in \mathbb{N}$ . Dann wird der folgende Vektorraum definiert:*

$$C^m(\Omega, \mathbb{R}^q) := \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q : u \text{ ist } m\text{-mal stetig differenzierbar in } \Omega\}$$

*Wenn  $\Omega$  zusätzlich beschränkt ist, so wird ein weiterer Vektorraum definiert:*

$$C^m(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^q) := \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q : u \text{ ist } m\text{-mal stetig differenzierbar in } \Omega, \\ \text{und für alle } |s| \leq m \text{ ist } \partial^s u \text{ auf } \overline{\Omega} \text{ stetig fortsetzbar}\}$$

*Auf diesem Vektorraum wird die folgende Norm definiert:*

$$\|\cdot\|_{C^m(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^q)} : C^m(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^q) \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \sum_{|s| \leq m} \|\partial^s u\|_{C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^q)}$$

*hierbei ist  $\|u\|_{C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^q)} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|_{\mathbb{R}^q}$ . Ferner wird noch der Funktionenraum aller **glatten Funktionen auf einer offenen Menge  $\Omega$**  definiert:*

$$C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^q) := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(\Omega, \mathbb{R}^q)$$

*und falls  $\Omega$  beschränkt ist:*

$$C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^q) := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^q)$$

Mit der Norm  $\|\cdot\|_{C^m(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^q)}$  ist der Vektorraum  $C^m(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^q)$  vollständig [Alt12, 1.6]. Im Fall

$q = 1$  wird  $\mathbb{R}^q$  in der Notation von  $C^m(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^q)$  weggelassen.

**Definition A.2** Sei  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $\alpha \in (0, 1)$ . Für eine Abbildung  $u : S \rightarrow \mathbb{R}$  heißt:

$$[u]_{\alpha, S} := \sup \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} : x, y \in S, x \neq y \right\} \in [0, \infty]$$

**Hölderkonstante von  $u$  auf  $S$  zum Exponenten  $\alpha$ .**

Für zwei Funktionen  $u, v : S \rightarrow \mathbb{R}$  gilt die folgende Abschätzung:

$$[uv]_{\alpha, S} \leq \sup_{x \in S} |u(x)| \cdot [v]_{\alpha, S} + [u]_{\alpha, S} \cdot \sup_{x \in S} |v(x)| \quad (\text{A.1})$$

Die im Folgenden definierten Hölderräume werden, der Einfachheit halber, auf  $\mathbb{B}$  definiert. Dies gewährleistet, neben der Konvexität, eine hohe Randregularität, siehe auch [GT01, 6.2]. Da die analytischen Betrachtungen von lokaler Art sind, erweisen sich diese Definitionen als ausreichend.

**Definition A.3** Für  $\alpha \in (0, 1)$  wird mit:

$$C^{0, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}) := \{u \in C^0(\overline{\mathbb{B}}) : [u]_{\alpha, \overline{\mathbb{B}}} < \infty\}$$

der Vektorraum aller  **$\alpha$ -hölderstetigen reellen Funktionen auf  $\mathbb{B}$**  definiert. Des Weiteren wird auf diesem Raum die Norm:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{C^{0, \alpha}(\overline{\mathbb{B}})} : C^{0, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \|u\|_{C^0(\overline{\mathbb{B}})} + [u]_{\alpha, \overline{\mathbb{B}}} \end{aligned}$$

definiert.

In [Alt12, 1.7] wird gezeigt, dass der Raum  $C^{0, \alpha}(\overline{\mathbb{B}})$ , versehen mit der Norm  $\|\cdot\|_{C^{0, \alpha}(\overline{\mathbb{B}})}$ , ein Banachraum ist.

Für zwei Funktionen  $u, v \in C^{0, \alpha}(\overline{\mathbb{B}})$  ergibt sich mit (A.1) die Abschätzung:

$$\|uv\|_{C^{0, \alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \leq \|u\|_{C^{0, \alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \|v\|_{C^{0, \alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \quad (\text{A.2})$$

**Definition A.4** Auf  $\mathbb{B}$  werden, für  $m \in \mathbb{N}$  und  $\alpha \in (0, 1)$ , die folgenden Vektorräume definiert:

$$C^{m, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}) := \{u \in C^{m, \alpha}(\overline{\mathbb{B}}) : \|\partial^s u\|_{C^{0, \alpha}(\overline{\mathbb{B}})} < \infty \text{ für alle } s \in \mathbb{N}^n \text{ mit } |s| = m\}$$

Auf dieser Menge werden die Normen  $|\cdot|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})}, \|\cdot\|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} : C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}) \longrightarrow \mathbb{R}$  wie folgt definiert:

$$|u|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} := \begin{cases} \|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} & \text{für } m = 0 \\ \|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + \sum_{|s|=m} \|\partial^s u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} & \text{für } m \geq 1 \end{cases}$$

$$\|u\|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} := \sum_{j=0}^m \max_{|s|=j} \|\partial^s u\|_{C^0(\overline{\mathbb{B}})} + \max_{|s|=m} [\partial^s u]_{\alpha,\mathbb{B}}$$

definiert.

Die Norm  $\|\cdot\|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})}$  wird in [GT01] verwendet. Existenz- und Eindeutigkeitsätze der Poisson-Gleichung mit Dirichlet-Randbedingung, sowie diverse Abschätzungen werden aus diesem Buch übernommen und an den entsprechenden Stellen direkt angegeben. Aus praktischen Gründen wird in dieser Arbeit die Norm  $|\cdot|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})}$  verwendet. Dazu wird gezeigt, dass diese beiden definierten Normen äquivalent sind. Für  $m \geq 1$  gilt für jedes  $u \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$ :

$$\begin{aligned} |u|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} &:= \|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + \sum_{|s|=m} \|\partial^s u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \leq C(n, m) \cdot \left( \|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + \max_{|s|=m} \|\partial^s u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \right) \\ &\leq C(n, m) \cdot \|u\|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \end{aligned} \tag{A.3}$$

andererseits folgt, für  $k \in \mathbb{N}$  und  $\beta \in (0, 1)$  mit  $k + \beta < m + \alpha$ , aus den Abschätzungen [GT01, (6.82), (6.89)], zusammen mit [GT01, (4.17)', (4.17)"], mit der Randregularität der Menge  $\mathbb{B}$ , die Abschätzung:

$$\|u\|_{C^{k,\beta}(\overline{\mathbb{B}})} \leq C(n, m, k, \alpha, \beta) \cdot \left( \|u\|_{C^0(\overline{\mathbb{B}})} + \max_{|s|=m} [\partial^s u]_{\alpha,\mathbb{B}} \right) \leq C(n, m, k, \alpha, \beta) \cdot \|u\|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \tag{A.4}$$

Aus der ersten Ungleichung in (A.4) folgt:

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} &\leq \|u\|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + \max_{|s|=m} \|\partial^s u\|_{C^0(\overline{\mathbb{B}})} + \max_{|s|=m} [\partial^s u]_{\alpha,\mathbb{B}} \\ &\leq C(n, m, \alpha) \cdot \left( \|u\|_{C^0(\overline{\mathbb{B}})} + \max_{|s|=m} [\partial^s u]_{\alpha,\mathbb{B}} \right) + \max_{|s|=m} \|\partial^s u\|_{C^0(\overline{\mathbb{B}})} + \max_{|s|=m} [\partial^s u]_{\alpha,\mathbb{B}} \\ &\leq \widehat{C}(n, m, \alpha) \cdot |u|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \end{aligned} \tag{A.5}$$



Die Äquivalenz der Normen  $|\cdot|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B})}$  und  $\|\cdot\|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B})}$  ist damit gezeigt. Es sei noch erwähnt, dass ausgehend von (A.4) aus (A.3) und (A.5), die Abschätzung:

$$|u|_{C^{k,\beta}(\mathbb{B})} \leq C(n, m, k, \alpha, \beta) \cdot |u|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B})} \quad (\text{A.6})$$

für  $k + \beta < m + \alpha$  folgt. Für die nächste Abschätzung sei erwähnt, dass für  $u, v \in C^m(\Omega)$ , wobei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  eine beliebige offene Menge ist, für  $|s| \leq m$  stets die Gleichung:

$$\partial^s(uv) = \sum_{\beta \leq s} \binom{s}{\beta} \partial^\beta u \partial^{s-\beta} v \quad (\text{A.7})$$

gilt. Nun seien  $u, v \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$ , dann ist mit (A.2) und (A.6):

$$\begin{aligned} |\partial^s(uv)|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} &\leq \sum_{\beta \leq s} \binom{s}{\beta} |\partial^\beta u|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} |\partial^{s-\beta} v|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} \\ &= |u|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} |\partial^s v|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} + |\partial^s u|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} |v|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} + \sum_{0 < \beta < s} \binom{s}{\beta} |\partial^\beta u|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} |\partial^{s-\beta} v|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} \\ &\leq |u|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} |\partial^s v|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} + |\partial^s u|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} |v|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} + \sum_{0 < \beta < s} \binom{s}{\beta} |u|_{C^{|\beta|,\alpha}(\mathbb{B})} |v|_{C^{|s-\beta|,\alpha}(\mathbb{B})} \\ &\leq |u|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} |\partial^s v|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} + |\partial^s u|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} |v|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} + C(n, m, \alpha) \cdot |u|_{C^{m-1,\alpha}(\mathbb{B})} |v|_{C^{m-1,\alpha}(\mathbb{B})} \end{aligned}$$

Daraus folgt, zusammen mit (A.2):

$$\begin{aligned} |uv|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B})} &= |uv|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} + \sum_{|s|=m} |\partial^s(uv)|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} \\ &\leq |u|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} |v|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B})} + |u|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B})} |v|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} + C(n, m, \alpha) \cdot |u|_{C^{m-1,\alpha}(\mathbb{B})} |v|_{C^{m-1,\alpha}(\mathbb{B})} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Durch nochmalige Anwendung von (A.6) folgt die etwas allgemeinere Abschätzung:

$$|uv|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B})} \leq C(n, m, \alpha) \cdot |u|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B})} |v|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B})} \quad (\text{A.9})$$

Ferner gilt für  $k \in \{1, \dots, m\}$ :

$$\begin{aligned} |u|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{B})} &= \|u\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} + \sum_{|s|=m} \|\partial^s u\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} \leq |u|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{B})} + \sum_{|s|=k} |\partial^s u|_{C^{m-k,\alpha}(\mathbb{B})} \\ &\stackrel{(\text{A.6})}{\leq} C(n, \alpha) \cdot |u|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{B})} + \sum_{|s|=k} |\partial^s u|_{C^{m-k,\alpha}(\mathbb{B})} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Nun soll ein geeigneter Funktionenraum für vektorwertige Funktionen, deren Komponentenfunktionen hölderstetig sind, eingeführt werden:

**Definition A.5** *Auf  $\mathbb{B}$  wird der folgende Vektorraum definiert:*

$$C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q) := \{(u_1, \dots, u_q)^\top : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{R}^q \text{ mit } u_j \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}) \forall j \in \{1, \dots, q\}\}$$

*Auf dieser Menge wird die Norm:*

$$|u|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} := \sum_{j=1}^q |u_j|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})}$$

*definiert.*

Die Vollständigkeit des Raumes  $C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  folgt aus der Vollständigkeit des Raumes  $C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$ . Mit (A.6) gilt für  $k \in \mathbb{N}$  und  $\beta \in (0, 1)$  mit  $k + \beta < m + \alpha$  die Abschätzung:

$$|u|_{C^{k,\beta}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \leq C(n, m, k, \alpha, \beta) \cdot |u|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \quad (\text{A.11})$$

Im Folgenden sei  $m \geq 1$ . Mit (A.8) folgt für  $a \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$  und  $u \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ :

$$\begin{aligned} |au|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} &= \sum_{i=1}^q |au_i|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \leq \sum_{i=1}^q |a|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |u_i|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + \sum_{i=1}^q |a|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |u_i|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ &\quad + \sum_{i=1}^q C(n, m, \alpha) \cdot |a|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |u_i|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ &= |a|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |u|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + |a|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |u|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + C(n, m, \alpha) \cdot |a|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |u|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Zusammen mit (A.6) und (A.11) ist:

$$|au|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \leq C(n, m, \alpha) \cdot |a|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |u|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \quad (\text{A.13})$$

Die Abschätzung (A.13) gilt auch für  $m = 0$  mit  $C = 1$ . Sei nun ein weiteres  $v \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  gegeben, dann ist mit (A.8):

$$\begin{aligned} |u \cdot v|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} &\leq \sum_{i=1}^q |u_i v_i|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \leq \sum_{i=1}^q |u_i|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |v_i|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + \sum_{i=1}^q |u_i|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |v_i|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ &\quad + \sum_{i=1}^q C(n, m, \alpha) \cdot |u_i|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} |v_i|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned} &\leq |u|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |v|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + |u|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |v|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \\ &\quad + C(n, m, \alpha) \cdot |u|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |v|_{C^{m-1,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

und es folgt mit (A.11):

$$|u \cdot v|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \leq C(n, m, \alpha) \cdot |u|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} |v|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \quad (\text{A.15})$$

Auch die Abschätzung (A.15) gilt für  $m = 0$  mit  $C = 1$ . Schließlich gilt mit (A.10) für  $k \in \{1, \dots, m\}$ :

$$\begin{aligned} |u|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} &= \sum_{j=1}^q |u_j|_{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \leq \sum_{j=1}^q |u_j|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} + \sum_{j=1}^q \sum_{|s|=k} |\partial^s u_j|_{C^{m-k,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} \\ &= |u|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} + \sum_{|s|=k} |\partial^s u|_{C^{m-k,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Abschließend werden noch die Sobolev-Räume eingeführt. Hierbei wird für  $p \in [1, \infty]$  der  $L^p$ -Raum wie in [Eva98, D.1] definiert.

**Definition A.6** *Es sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene und beschränkte Menge. Der **Sobolev-Raum** der Ordnung  $m \in \mathbb{N}$ , mit Exponenten  $p \in [1, \infty]$ , wird wie folgt definiert:*

$$\begin{aligned} W^{m,p}(\Omega) &:= \{f \in L^p(\Omega) : \text{Für alle } |s| \leq m \text{ existiert ein } f^{(s)} \in L^p(\Omega) \text{ mit } f^{(0)} = f \text{ und} \\ &\quad \int_{\Omega} \partial^s \zeta f^{(0)} dx = (-1)^{|s|} \int_{\Omega} \zeta f^{(s)} dx \text{ für alle } \zeta \in C_0^\infty(\Omega)\} \end{aligned}$$

Auf diesem Raum wird die Norm  $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)} : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  wie folgt definiert:

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \sum_{|s| \leq m} \|f^{(s)}\|_{L^p(\Omega)}$$

Ferner wird der Unterraum  $W_0^{m,p}(\Omega)$  wie folgt definiert:

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \{f \in W^{m,p}(\Omega) : \exists (f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } \lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_{W^{m,p}(\Omega)} = 0\}$$

## B Begriffe

In diesem Teil des Anhangs werden die grundlegenden topologischen und differential-geometrischen Begriffe und Zusammenhänge, die in der Arbeit verwendet werden, eingeführt. Diese wurden im Wesentlichen [Mun00] und [Lee03] entnommen.

**Definition B.1** Eine **Topologie** auf einer Menge  $X$  ist ein Teilsystem der Potenzmenge  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (i)  $X, \emptyset \in \mathcal{T}$
- (ii) Falls  $\{U_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq \mathcal{T}$  für eine beliebige Indexmenge  $\Lambda$ , dann ist auch  $\bigcup_{i \in \Lambda} U_i \in \mathcal{T}$
- (iii) Falls  $\{U_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq \mathcal{T}$  für eine endliche Indexmenge  $\Lambda$ , dann ist auch  $\bigcap_{i \in \Lambda} U_i \in \mathcal{T}$

Das Tupel  $(X, \mathcal{T})$  heißt **topologischer Raum**. Die Elemente in  $\mathcal{T}$  werden **offene Mengen** genannt. Eine Menge  $S \subseteq X$  heißt **abgeschlossen**, wenn das Komplement  $X \setminus S$  eine offene Menge ist. Für einen Punkt  $p \in X$  heißt eine Menge  $U \in \mathcal{T}$  mit  $p \in U$  **Umgebung des Punktes  $p$** .

Wenn aus dem Zusammenhang heraus klar ist, welche Topologie auf  $X$  definiert ist, oder Verwechslungen ausgeschlossen sind, dann wird anstatt  $(X, \mathcal{T})$  nur  $X$  geschrieben.

**Definition B.2** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $S \subseteq X$ . Die Menge:

$$\text{int}(S) := \bigcup_{U \in \mathcal{T}, U \subseteq S} U$$

wird als das **Innere von  $S$**  und die Menge:

$$\overline{S} := \bigcap_{U \in \mathcal{T}, X \setminus U \supseteq S} X \setminus U$$

als der **Abschluss von  $S$**  bezeichnet. Die Menge:

$$\partial S := \overline{S} \setminus \text{int}(S)$$

heißt **Rand von  $S$** . Falls  $\overline{S} = X$  gilt, dann wird die Menge  $S$  als **dichte Teilmenge** in  $X$  bezeichnet.

**Definition B.3** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum,  $V$  ein Vektorraum, sowie eine Abbildung  $f : X \rightarrow V$  gegeben. Dann wird die Menge:

$$\text{supp}(f) := \overline{\{p \in M : f(p) \neq 0\}}$$

als der **Träger von  $f$**  bezeichnet.

**Definition B.4** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum, und sei  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$  ein Mengensystem, dann heißt  $\mathcal{U}$  **Überdeckung von  $X$** , wenn:

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X$$

gilt. Falls  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ , dann wird  $\mathcal{U}$  **offene Überdeckung von  $X$**  genannt.

**Definition B.5** Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  heißt **kompakt**, falls jede offene Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $X$  eine endliche Teilüberdeckung  $\{U_1, \dots, U_N\} \subseteq \mathcal{U}$  besitzt. Letzteres bedeutet, dass:

$$\bigcup_{j=1}^N U_j = X$$

gilt.

**Definition B.6** Gegeben sei eine Menge  $M$ , dann wird eine Abbildung  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  als **Metrik** bezeichnet, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (i)  $\forall x, y \in M$  ist  $d(x, y) \geq 0$  und  $d(x, y) = 0$  genau dann wenn  $x = y$  gilt
- (ii)  $\forall x, y \in M$  ist  $d(x, y) = d(y, x)$ .
- (iii)  $\forall x, y, z \in M$  ist  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Das Tupel  $(M, d)$  wird als **metrischer Raum** bezeichnet.

Ist aus dem Zusammenhang klar, welche Metrik auf  $M$  definiert ist, oder sind Verwechslungen auszuschließen, so wird für  $(M, d)$  nur  $M$  geschrieben. In einem metrischen Raum wird, für ein  $x \in M$  und einen Radius  $R \in \mathbb{R}_{>0}$ , die Menge:

$$B_R(x) := \{y \in X : d(x, y) < R\}$$

als **offener Ball um  $x$  mit dem Radius  $R$**  bezeichnet. Auf dem Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  wird immer die Metrik verwendet, die von der **euklidischen Norm**  $|x|_{\mathbb{R}^n} := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}$  induziert wird, das heißt:  $d(x, y) = |x - y|_{\mathbb{R}^n}$ .

**Definition B.7** Sei  $X$  eine Menge. Eine **Basis für eine Topologie auf  $X$**  ist ein Mengensystem  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$  mit folgenden Eigenschaften:

(i)

$$X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

(ii) Ist  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  und  $x \in B_1 \cap B_2$ , dann existiert ein  $B_3 \in \mathcal{B}$ , so dass  $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$  gilt.

Wie es die Wortwahl bereits nahelegt, kann für eine Menge  $X$  eine, in Definition B.7 beschriebene, Basis  $\mathcal{B}$  dafür verwendet werden, eine Topologie auf  $X$  zu erzeugen. Welche Gestalt diese Topologie haben soll, wird in der folgenden Definition festgelegt:

**Definition B.8** Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$  eine Basis für eine Topologie auf  $X$ , dann wird ein Mengensystem  $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$  wie folgt definiert:

$$\text{Für } U \subseteq X \text{ gilt } U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \iff \forall x \in U \exists B_x \in \mathcal{B} \text{ mit } x \in B_x \subseteq U$$

Das Mengensystem  $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$  ist eine Topologie auf  $X$  und wird als **die von  $\mathcal{B}$  erzeugte Topologie auf  $X$**  bezeichnet. [Mun00, §13]

**Definition B.9** Sei  $(X, d)$  metrischer Raum, dann wird die von der Basis:

$$\mathcal{B} = \{B_R(x) : x \in X \text{ und } R > 0\}$$

erzeugte Topologie auf  $X$  als die **von der Metrik  $d$  erzeugte Topologie** bezeichnet. Ist  $X = \mathbb{R}^n$  und  $d$  die euklidische Metrik, so heißt diese Topologie **Standardtopologie auf  $\mathbb{R}^n$** .

**Definition B.10** Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$ , dessen Topologie von einer Metrik  $d$  induziert wird, heißt **metrisierbar**.

**Definition B.11** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum, und  $S \subseteq X$  eine Teilmenge von  $X$ . Dann wird ein Mengensystem  $\mathcal{T}_S \subseteq \mathcal{P}(X)$  wie folgt definiert:

$$U \in \mathcal{T}_S \iff \exists V \in \mathcal{T} \text{ mit } U = V \cap S.$$

Das Mengensystem  $\mathcal{T}_S$  ist eine Topologie auf  $S$ , und wird als die von  $X$  auf  $S$  induzierte **Unterraumtopologie** bezeichnet. Ein Element in  $\mathcal{T}_S$  wird **in  $S$  relativ offene Menge** genannt. [Mun00, §16]

**Definition B.12** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Eine Teilmenge  $S \subseteq X$  heißt **relativ kompakt**, wenn  $(\overline{S}, \mathcal{T}_{\overline{S}})$  ein kompakter topologischer Raum ist.

**Definition B.13** Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  heißt **Hausdorff-Raum**, falls für eine beliebige Auswahl von Punkten  $p, q \in X$ , mit  $p \neq q$ , eine offene Menge  $U \in \mathcal{T}$  mit  $p \in U$ , und eine offene Menge  $V \in \mathcal{T}$  existiert, so dass  $U \cap V = \emptyset$  gilt.

**Definition B.14** Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  heißt **separabel**, wenn es eine abzählbare Teilmenge  $S \subseteq X$  gibt, so dass  $\overline{S} = X$  gilt.

Ist  $U \in \mathcal{T}$ , dann ist  $U$ , versehen mit der Unterraumtopologie, separabel, falls  $(X, \mathcal{T})$  separabel ist. [Mun00, §30]. Der Vektorraum  $\mathbb{R}^n$ , versehen mit der Standardtopologie, ist separabel, da die Menge  $\mathbb{Q}^n$  abzählbar ist, und dicht in  $\mathbb{R}^n$  liegt.

**Definition B.15** Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  erfüllt das **zweite Abzählbarkeitsaxiom**, falls es eine abzählbare Basis  $\mathcal{B}$  gibt, welche die Topologie  $\mathcal{T}$  erzeugt.

Sowohl die Hausdorff-Eigenschaft, als auch das zweite Abzählbarkeitsaxiom übertragen sich auf jeden beliebigen Unterraum von  $(X, \mathcal{T})$  [Mun00, Theorem 17.11 und Theorem 30.2]. Jeder metrisierbare topologische Raum erfüllt die Hausdorff-Eigenschaft. Ist der topologische Raum zusätzlich separabel, so erfüllt der Raum auch das zweite Abzählbarkeitsaxiom. [Mun00, §21 und §30]

**Definition B.16** Eine Abbildung  $F : X \longrightarrow Y$  zwischen zwei topologischen Räumen  $(X, \mathcal{T}_X)$  und  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  heißt **stetig**, falls:

$$U \in \mathcal{T}_Y \implies F^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$$

gilt. Ist die Abbildung  $F$  zusätzlich invertierbar, und ist die inverse Abbildung  $F^{-1} : Y \longrightarrow X$  ebenfalls stetig, so heißt diese Abbildung **Homöomorphismus**. Die topologischen Räume heißen in diesem Fall **homöomorph**.

**Definition B.17** Eine **topologische Mannigfaltigkeit** der Dimension  $n \in \mathbb{N}$  ist ein topologischer Raum  $(M, \mathcal{O})$ , welcher die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (i) die Hausdorff-Eigenschaft

(ii) das zweite Abzählbarkeitsaxiom

Zusätzlich soll dieser topologische Raum **lokal euklidisch** sein. Das bedeutet: Für jedes  $p \in M$  existiert eine Umgebung  $U \in \mathcal{O}$  von  $p$ , und eine in  $\mathbb{R}^n$  offene Menge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$ , sowie ein Homöomorphismus  $\varphi : U \rightarrow V$ . Hierbei werden die Unterraumtopologien verwendet.

Die Menge  $U$  wird als **Koordinatenumgebung von  $p$**  bezeichnet. Das Tupel  $(U, \varphi)$  heißt **Karte**. Da  $V = \varphi(U)$  gilt, wird  $V$  in der Notation nicht direkt berücksichtigt. Falls  $\varphi(p) = 0$  gilt, dann heißt  $U$  **um  $p$  zentrierte Koordinatenumgebung**, und falls  $V = B_R(x)$ , für ein  $R > 0$  und  $x \in \mathbb{R}^n$ , so heißt  $U$  **Koordinatenball**.

Um die Dimension einer topologischen Mannigfaltigkeit  $(M, \mathcal{O})$  auszudrücken, wird auch kurz  $\dim(M) = n$  geschrieben.

**Definition B.18** Sei  $(M, \mathcal{O})$  eine topologische Mannigfaltigkeit, und seien  $(U, \varphi), (V, \psi)$  Karten mit  $U \cap V \neq \emptyset$ . Dann heißt die Abbildung:

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

**Koordinatentransformation.** Zwei Karten  $(U, \varphi), (V, \psi)$  heißen  **$C^\infty$ -verträglich**, falls  $U \cap V = \emptyset$  gilt, oder  $U \cap V \neq \emptyset$  und die Koordinatentransformation  $\psi \circ \varphi^{-1}$  ein  **$C^\infty$ -Diffeomorphismus** ist, das bedeutet, dass  $\psi \circ \varphi^{-1}$  invertierbar ist, und es ist sowohl  $\psi \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U \cap V), \psi(U \cap V))$ , als auch  $\varphi \circ \psi^{-1} \in C^\infty(\psi(U \cap V), \varphi(U \cap V))$  erfüllt.

**Definition B.19** Sei  $(M, \mathcal{O})$  eine topologische Mannigfaltigkeit. Eine Familie von Karten  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  heißt **Atlas**, falls:

$$\bigcup_{i \in I} U_i = M$$

gilt. Sind zusätzlich, für jede Auswahl  $i, j \in I$ , die Karten  $(U_i, \varphi_i)$  und  $(U_j, \varphi_j)$   $C^\infty$ -verträglich, so wird  $\mathcal{A}$  als  **$C^\infty$ -Atlas** auf  $(M, \mathcal{O})$  bezeichnet.

**Definition B.20** Sei  $(M, \mathcal{O})$  eine topologische Mannigfaltigkeit. Ein  $C^\infty$ -Atlas  $\mathcal{A}$  auf  $(M, \mathcal{O})$  heißt **maximaler  $C^\infty$ -Atlas** auf  $(M, \mathcal{O})$ , wenn die folgende Aussage gilt:

Ist  $(U, \varphi)$  eine Karte, die mit allen Karten  $(V, \psi) \in \mathcal{A}$   $C^\infty$ -verträglich ist, dann gilt  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ .

Ein solcher Atlas  $\mathcal{A}$  heißt **glatte Struktur**, oder auch  **$C^\infty$ -Struktur** auf  $(M, \mathcal{O})$ .



In [Lee03, Lemma 1.10. (a)] wird gezeigt, dass für jeden  $C^\infty$ -Atlas  $\widehat{\mathcal{A}}$  genau ein maximaler  $C^\infty$ -Atlas  $\overline{\mathcal{A}}$  existiert, der  $\widehat{\mathcal{A}}$  enthält.

**Definition B.21** *Eine  $n$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit  $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A})$ , oder auch  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit, ist eine topologische Mannigfaltigkeit  $(M, \mathcal{O})$ , zusammen mit einem maximalen  $C^\infty$ -Atlas  $\mathcal{A}$ .*

Ist aus dem Zusammenhang heraus erkennbar, welche Topologie  $\mathcal{O}$ , und welcher Atlas  $\mathcal{A}$  auf  $M$  definiert sind, oder sind Verwechslungen auszuschließen, so wird nur  $M$ , oder um die Dimension hervorzuheben  $M^n$ , anstatt  $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  geschrieben. In diesem Zusammenhang wird mit  $\mathcal{A}$  immer der Atlas auf  $(M, \mathcal{O})$  bezeichnet.

Im Folgenden soll der Begriff der Produktmannigfaltigkeit definiert werden, dazu seien  $\{(M_i, \mathcal{O}_i, \mathcal{A}_i)\}_{i \in \{1, \dots, k\}}$  glatte Mannigfaltigkeiten, mit  $\dim(M_i) = n_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Es sei:

$$M_\times := \prod_{i=1}^k M_i$$

das kartesische Produkt der Mengen  $M_1, \dots, M_k$ , und es sei  $\mathcal{O}_\times \subseteq \mathcal{P}(M_\times)$  die Produkttopologie auf der Menge  $M_\times$  [Mun00, §19]. Mit [Mun00, §21 und §30] erfüllt der topologische Raum  $(M_\times, \mathcal{O}_\times)$  sowohl die Hausdorff-Eigenschaft, als auch das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Für ein  $(p_1, \dots, p_k) \in M_\times$  können, für  $i \in \{1, \dots, k\}$ , Karten  $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}_i$  gewählt werden, so dass  $p_i \in U_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, k\}$  gilt. Die Abbildung:

$$\begin{aligned} \varphi_\times : \prod_{i=1}^k U_i &\longrightarrow \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^k n_i} \\ (x_1, \dots, x_k) &\mapsto (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_k)) \end{aligned} \tag{B.1}$$

ist ein Homöomorphismus auf das Bild:

$$\varphi_\times \left( \prod_{i=1}^k U_i \right) = \prod_{i=1}^k \varphi_i(U_i)$$

Der topologische Raum  $(M_\times, \mathcal{O}_\times)$  ist also eine topologische Mannigfaltigkeit. Die Vereinigung aller Karten der Form (B.1) bildet einen  $C^\infty$ -Atlas [Lee03, Chapter 1]. Mit  $\mathcal{A}_\times$  wird der maximale  $C^\infty$ -Atlas bezeichnet, der diesen Atlas enthält. Es wird die folgende Bezeichnung festgelegt:

**Definition B.22** *Die glatte Mannigfaltigkeit  $(M_\times, \mathcal{O}_\times, \mathcal{A}_\times)$  wird als **glatte Produktmannigfaltigkeit** bezeichnet.*

Der Konstruktion dieser Mannigfaltigkeit ist direkt zu entnehmen, dass  $\dim M_{\times} = \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^k n_i}$  gilt.

Für eine beliebige Menge  $S$  wird die Abbildung  $id_S : S \rightarrow S$  mit  $id_S(x) = x$  für alle  $x \in S$  definiert. Diese Abbildung wird auch als **Identität auf  $S$**  bezeichnet.

**Definition B.23** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\mathcal{A}$ , der Atlas der die Abbildung  $id_{\Omega} : \Omega \rightarrow \Omega$  enthält. Dann wird die glatte Struktur, die aus  $\Omega$ , versehen mit der Unterraumtopologie und dem Atlas  $\mathcal{A}$  besteht, als **Standardstruktur auf  $\Omega$**  bezeichnet.

**Definition B.24** Seien  $(M, \mathcal{O}_M, \mathcal{A}_M)$  und  $(N, \mathcal{O}_N, \mathcal{A}_N)$  glatte Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung  $F : M \rightarrow N$  heißt **glatt**, falls es zu jedem  $p \in M$  eine Karte  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_M$  mit  $p \in U$ , und eine Karte  $(V, \psi) \in \mathcal{A}_N$  mit  $F(U) \subseteq V$  gibt, so dass die **Koordinatendarstellung** von  $F$  bezüglich  $(U, \varphi)$  und  $(V, \psi)$ :

$${}_{\psi}^{\varphi}F := \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V) \quad (\text{B.2})$$

eine glatte Abbildung im Sinne von Definition A.1 ist. In diesem Fall wird die Schreibweise  $F \in C^{\infty}(M, N)$  verwendet. Im Spezialfall  $N = \mathbb{R}$ , wobei  $\mathbb{R}$  die Standardstruktur trägt, wird nur  $F \in C^{\infty}(M)$  geschrieben. Hierfür wird die Koordinatendarstellung in (B.2) mit  ${}^{\varphi}F$  notiert, falls  $\psi = id_V$  ist.

Die Menge  $C^{\infty}(M, \mathbb{R}^q)$ , mit der punktweisen Addition und der skalaren Multiplikation, ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Mit der punktweisen Multiplikation von Funktionen ist der Vektorraum  $C^{\infty}(M)$  eine  $\mathbb{R}$ -Algebra. Verknüpfungen von glatten Abbildungen auf glatten Mannigfaltigkeiten sind glatt. [Lee03, Lemma 2.4]

**Definition B.25** Sei  $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Für ein  $p \in M$  heißt eine lineare Abbildung  $X : C^{\infty}(M) \rightarrow \mathbb{R}$  **Derivation in  $p$** , falls für alle  $f, g \in C^{\infty}(M)$  die Produktregel:

$$X(fg) = f(p) \cdot Xg + Xf \cdot g(p)$$

erfüllt ist. Für zwei Derivationen  $X, Y$  im Punkt  $p$  wird die Addition:

$$(X + Y)f := Xf + Yf \quad \text{für } f \in C^{\infty}(M)$$

und die skalare Multiplikation:

$$(\lambda X)f := \lambda \cdot Xf \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f \in C^{\infty}(M)$$

definiert. Der mit diesen Operationen definierte Vektorraum aller Derivationen im Punkt  $p$  wird **Tangentialraum von  $M$  im Punkt  $p$**  genannt, und mit  $T_p M$  bezeichnet.

**Definition B.26** Seien  $(M, \mathcal{O}_M, \mathcal{A}_M)$  und  $(N, \mathcal{O}_N, \mathcal{A}_N)$  glatte Mannigfaltigkeiten sowie  $F \in C^\infty(M, N)$ . Für ein  $p \in M$  heißt die Abbildung  $F_* : T_p M \longrightarrow T_{F(p)} N$ , die wie folgt definiert ist:

$$(F_* X)f = X(f \circ F) \quad \text{für } f \in C^\infty(N) \text{ und } X \in T_p M$$

**Ableitung von  $F$  im Punkt  $p$ .**

Die grundlegenden Eigenschaften der Ableitung, wie zum Beispiel die Linearität, sind in [Lee03, Lemma 3.5] aufgeführt.

**Definition B.27** Sei  $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  eine glatte Mannigfaltigkeit, und sei  $U \subseteq M$  eine offene Menge. Dann wird der topologische Raum  $U$ , zusammen mit der glatten Struktur:

$$\{(V, \varphi) \in \mathcal{A} : V \subseteq U\}$$

als **offene Untermannigfaltigkeit** bezeichnet.

Für eine beliebige Menge  $X$  und eine Teilmenge  $S \subseteq X$  wird die Abbildung  $i : S \longrightarrow X$ , mit  $i(x) = x$  für  $x \in U$ , als **Inklusion** bezeichnet. In [Lee03, Lemma 3.7] wird gezeigt, dass für eine offene Untermannigfaltigkeit  $U \subseteq M$  und ein beliebiges  $p \in U$  die Ableitung der Inklusion  $i_* : T_p U \longrightarrow T_p M$  ein Isomorphismus ist. Diese Tatsache erlaubt die Identifikation des Tangentialraumes  $T_p U$  mit dem Tangentialraum  $T_p M$ .

**Definition B.28** Sei  $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ , und sei  $p \in M$ , ferner sei  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$  eine Karte mit  $p \in U$ . Dann wird für  $i \in \{1, \dots, n\}$  der  **$i$ -te Koordinatenvektor**  ${}^\varphi \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \in T_p U$  folgendermaßen definiert:

$${}^\varphi \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f) := \partial_i {}^\varphi f(\varphi(p)) \quad \text{für } f \in C^\infty(U)$$

In Anlehnung an die vorhergehende Bemerkung, wird der Tangentialvektor  $i_* \left( {}^\varphi \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right)$  auch mit  ${}^\varphi \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  bezeichnet.

In [Lee03, Lemma 3.9] wird gezeigt, dass die Menge der Koordinatenvektoren:

$$\left\{ {}^\varphi \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, {}^\varphi \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\} \subseteq T_p U \tag{B.3}$$

eine Basis des Tangentialraumes  $T_p U$  bildet. Daraus folgt insbesondere, dass  $T_p U$  beziehungsweise  $T_p M$  ein Vektorraum der Dimension  $n$  ist. Der gemäß [Fis08, 6.1] definierte Dualraum zu  $T_p M$  wird mit  $T_p^* M$  bezeichnet. Die Elemente in  $T_p^* M$  werden **Kovektoren** genannt. Der Dualraum besitzt eine Basis:

$$\left\{ {}^\varphi dx^1|_p, \dots, {}^\varphi dx^n|_p \right\} \subseteq T_p^* M \quad (\text{B.4})$$

welche über die Bestimmungsgleichungen:

$${}^\varphi dx^i|_p \left( {}^\varphi \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \delta_j^i \quad \text{für alle } i, j \in \{1, \dots, n\}$$

definiert ist. Diese Basis wird als die zu (B.3) **duale Basis** bezeichnet. In [Lee03, Chapter 3] wird gezeigt, dass, in der Situation in Definition B.26, die Ableitung der Abbildung  $F$ , in der Basis der Koordinatenvektoren zu  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_M$ , mit  $p \in U$  und  $(V, \psi) \in \mathcal{A}_N$  mit  $F(U) \subseteq V$ , von der Jacobimatrix der Abbildung  ${}^\varphi_\psi F$  im Punkt  $\varphi(p)$  repräsentiert wird. Konkret bedeutet das für  $i \in \{1, \dots, \dim(M)\}$ :

$$F_* {}^\varphi \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum_{j=1}^{\dim(N)} \partial_i {}^\varphi_\psi F^j(\varphi(p)) {}^\psi \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_{F(p)} \quad (\text{B.5})$$

**Definition B.29** Sei  $F \in C^\infty(M, N)$  eine glatte Abbildung zwischen zwei glatten Mannigfaltigkeiten  $(M, \mathcal{O}_M, \mathcal{A}_M)$  und  $(N, \mathcal{O}_N, \mathcal{A}_N)$ , dann wird der **Rang der Abbildung  $F$  im Punkt  $p$**  als der Rang der Ableitung  $F_* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$  definiert.

Hat die Abbildung  $F$  in jedem Punkt  $p \in M$  den Rang  $\dim(M)$ , dann wird die Abbildung **Immersion** genannt. Falls  $F$  eine Immersion ist und die Menge  $M$  homöomorph auf die Menge  $F(M)$  abbildet, wobei  $F(M)$  mit der Unterraumtopologie versehen wird, dann wird diese Abbildung **glatte Einbettung** oder  **$C^\infty$ -Einbettung** genannt.

**Definition B.30** Sei  $M$  ein topologischer Raum. Ein **Vektorbündel vom Rang  $k$  über/auf  $M$**  ist ein topologischer Raum  $E$ , zusammen mit einer surjektiven stetigen Abbildung  $\pi : E \rightarrow M$ , wobei die folgenden Eigenschaften erfüllt sein sollen:

- (i) Für jedes  $p \in M$  hat die Menge  $E_p := \pi^{-1}(p) \subseteq E$ , welche auch als **Faser von  $E$  über  $p$**  bezeichnet wird, die Gestalt eines  $k$ -dimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraumes.
- (ii) Für jedes  $p \in M$  existiert eine Umgebung  $U$  von  $p$  und ein Homöomorphismus  $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ , so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times \mathbb{R}^k \\
 \searrow \pi & & \swarrow \pi_1 \\
 & U &
 \end{array}$$

Hierbei ist  $\pi_1 : U \times \mathbb{R}^k \longrightarrow U$  mit  $\pi_1(x, y) = x$  für  $(x, y) \in U \times \mathbb{R}^k$  definiert. Darüber hinaus soll die Einschränkung:

$$\Phi|_{E_p} : E_p \longrightarrow \{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$$

ein linearer Isomorphismus sein.

Die in (ii) definierte Abbildung  $\Phi$  wird als **lokale Trivialisierung von  $E$  über  $M$**  bezeichnet. Die Mannigfaltigkeit  $M$  wird in diesem Zusammenhang auch als **Basis** bezeichnet, während für  $E$  die Bezeichnung **Totalraum** gebräuchlich ist. Ein Vektorbündel wird kurz  $(E, M, \pi)$  notiert.

Falls  $(M, \mathcal{O}_M, \mathcal{A}_M)$  und  $(E, \mathcal{O}_E, \mathcal{A}_E)$  glatte Mannigfaltigkeiten sind, die Abbildung  $\pi : E \longrightarrow M$  eine glatte Abbildung ist, und die lokalen Trivialisierungen als Diffeomorphismen gewählt werden können, so heißt  $E$  **glattes Vektorbündel** über  $M$ .

**Definition B.31** Ein glattes Vektorbündel  $(E, M, \pi)$  vom Rang  $k$  über einer glatten Mannigfaltigkeit  $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  heißt **glatt trivialisierbar**, falls eine glatte lokale Trivialisierung  $\Phi : E \longrightarrow M \times \mathbb{R}^k$ , also eine glatte globale Trivialisierung, existiert.

**Definition B.32** Gegeben sei ein glattes Vektorbündel  $(E, M, \pi)$  auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A})$ . Eine stetige Abbildung  $\sigma : M \longrightarrow E$  heißt **Schnitt in  $E$** , falls  $\pi \circ \sigma = \text{id}_M$  gilt. Ist die Abbildung  $\sigma$  glatt, so wird sie **glatter Schnitt in  $E$**  genannt.

Im Folgenden soll der Begriff der eingebetteten Untermannigfaltigkeit definiert werden, hierzu sei  $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  eine  $n$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit. Es sei eine Menge  $S \subseteq M$  mit der folgenden Eigenschaft gegeben:

Es existiert ein  $k \in \mathbb{N}$ , für dass für alle  $p \in M$  ein  $(U_p, \varphi_p) \in \mathcal{A}$  mit  $p \in U_p$  existiert, so dass:

$$\varphi_p(S \cap U_p) = (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap \varphi_p(U_p)$$

gilt. Dann ist für jedes  $p \in M$  die Abbildung:

$$\begin{aligned}
 \hat{\varphi}_p : S \cap U_p &\longrightarrow V_p := (pr_k \circ \varphi_p)(U_p) \subseteq \mathbb{R}^k \\
 x &\mapsto (pr_k \circ \varphi_p)(x)
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

wobei:

$$\begin{aligned} pr_k : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ (y^1, \dots, y^n) &\mapsto (y^1, \dots, y^k) \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus [Lee03, Theorem 8.2]. Somit ist  $(S, \mathcal{O}_S)$ , mit der Unterraumtopologie  $\mathcal{O}_S$ , eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension  $k$ . Ferner ist der Atlas  $\{(\widehat{\varphi}_p, S \cap U_p)\}_{p \in M}$ , mit Karten der Form (B.6), ein  $C^\infty$ -Atlas auf  $(S, \mathcal{O}_S)$ . Dies rechtfertigt die folgende Definition:

**Definition B.33** Die glatte Mannigfaltigkeit  $(S, \mathcal{O}_S, \mathcal{A}_S)$ , wobei  $\mathcal{A}_S$  der maximale Atlas ist, der die Familie von Karten  $\{(\widehat{\varphi}_p, S \cap U_p)\}_{p \in M}$  enthält, wird als **eingebettete Untermannigfaltigkeit der Dimension  $k$**  bezeichnet.

**Definition B.34** Gegeben sei eine  $n$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit  $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  und ein  $p \in M$ . Ein **kovarianter 2-Tensor auf  $T_p M$**  ist eine bilineare Abbildung:

$$T : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$$

Die Menge aller kovarianten 2-Tensoren auf  $T_p M$  wird mit  $T^2(T_p M)$  bezeichnet.

Auf dieser Menge werden Operationen:

$$\begin{aligned} (aT)(X_1, X_2) &:= a \cdot T(X_1, X_2) & X_1, X_2 \in T_p M, \ a \in \mathbb{R} \\ (T + T')(X_1, X_2) &:= T(X_1, X_2) + T'(X_1, X_2) & X_1, X_2 \in T_p M \end{aligned}$$

definiert. Mit diesen Operationen wird die Menge  $T^2(T_p M)$  zu einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Ein  $T \in T^2(T_p M)$  heißt **symmetrisch**, falls  $T(X_1, X_2) = T(X_2, X_1)$  für alle  $X_1, X_2 \in T_p M$  gilt. Die Menge aller symmetrischen kovarianten 2-Tensoren bildet einen Unterraum des Vektorraumes  $T^2(T_p M)$ , und wird mit  $\Sigma^2(T_p M)$  notiert. Ein  $T \in T^2(T_p M)$  heißt **positiv definit**, falls  $T(X, X) > 0$  für alle  $X \in T_p M \setminus \{0\}$  gilt. Für zwei Kovektoren  $\omega, \eta \in T_p^* M$ , wird das **Tensorprodukt**:

$$\begin{aligned} \omega \otimes \eta : T_p M \times T_p M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto \omega(X) \cdot \eta(Y) \end{aligned} \tag{B.7}$$

definiert. Aus dieser Definition folgt direkt, dass  $\omega \otimes \eta \in T^2(T_p M)$  gilt. In [Lee03,

Proposition 11.2] wird gezeigt, dass für ein  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$  mit  $p \in U$ , die Menge:

$$\left\{ \varphi dx^i|_p \otimes \varphi dx^j|_p \right\}_{1 \leq i, j \leq n} \subseteq T^2(T_p M)$$

eine Basis des Vektorraumes  $T^2(T_p M)$  bildet. Daraus folgt insbesondere, dass die Dimension des Vektorraumes  $T^2(T_p M)$  gleich  $n^2$  ist. Neben dem in (B.7) definierten Tensorprodukt, wird, für zwei Kovektoren  $\omega, \eta \in T^*(T_p M)$ , das **symmetrisierte Tensorprodukt**:

$$\begin{aligned} \omega \eta &: T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega \eta &:= \frac{1}{2}(\omega \otimes \eta + \eta \otimes \omega) \end{aligned}$$

verwendet. Die Menge:

$$\left\{ \varphi dx^i|_p \varphi dx^j|_p \right\}_{1 \leq i \leq j \leq n} \subseteq T^2(T_p M)$$

bildet eine Basis des Vektorraumes  $\Sigma^2(T_p M)$ . Damit ist  $\Sigma^2(T_p M)$  ein  $\frac{n}{2}(n+1)$ -dimensionaler Unterraum von  $T^2(T_p M)$ . Im Folgenden sei, für ein beliebiges Mengensystem  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , die **disjunkte Vereinigung**  $\coprod_{\alpha \in A} X_\alpha$  von  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  wie folgt definiert:

$$\coprod_{\alpha \in A} X_\alpha := \{(x, \alpha) : \alpha \in A \text{ und } x \in X_\alpha\}$$

**Definition B.35** Sei  $(M, \mathcal{A}, \mathcal{O})$  eine glatte Mannigfaltigkeit, dann wird die Menge:

$$T^2(M) := \coprod_{p \in M} T^2(T_p M)$$

als **Bündel von kovarianten 2-Tensoren** bezeichnet.

Nun wird beschrieben, wie aus der Menge  $T^2(M)$  ein glattes Vektorbündel konstruiert werden kann. Zunächst sei:

$$\begin{aligned} \pi : T^2(M) &\longrightarrow M \\ (u, p) &\mapsto p \end{aligned}$$

Es sei  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ , dann wird eine Abbildung  $\Phi_U$  wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\Phi_U : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^{n^2} \\ (T, p) &\mapsto (\varphi(p), (\varphi T_{ij}(p))_{1 \leq i, j \leq n})\end{aligned}$$

wobei, unter Beachtung von (B.4), die Koeffizientenmenge  $(\varphi T_{ij}(p))_{1 \leq i, j \leq n}$  über die Gleichung:

$$T(p) = \varphi T_{ij}(p) \varphi dx^i \big|_p \otimes \varphi dx^j \big|_p$$

eindeutig bestimmt ist. Mithilfe allgemeiner Resultate über die Konstruktion von glatten Mannigfaltigkeiten [Lee03, Lemma 1.23] und Vektorbündeln [Lee03, Lemma 5.5], wird aus diesen Karten eine Topologie und ein Atlas konstruiert, so dass  $(T^2(M), M, \pi)$  ein glattes Vektorbündel vom Rang  $n^2$  ist. Ein glatter Schnitt in diesem Vektorbündel wird **glattes kovariantes 2-Tensorfeld** genannt. Die Menge aller glatten kovarianten 2-Tensorfelder wird mit  $\mathcal{T}^2(M)$  bezeichnet. Mit punktweiser Addition und skalarer Multiplikation mit reellen Koeffizienten bildet diese Menge einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

**Definition B.36** Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Ein  $T \in \mathcal{T}^2(M)$  heißt **glattes symmetrisches kovariantes 2-Tensorfeld** auf  $M$ , falls für alle  $p \in M$  der kovariante 2-Tensor  $T(p)$  symmetrisch ist.

**Definition B.37** Sei  $(M, \mathcal{A}, \mathcal{O})$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine **Riemannsche Metrik**  $g \in \mathcal{T}^2(M)$  auf  $M$  ist ein glattes symmetrisches kovariantes 2-Tensorfeld auf  $M$ , mit der Eigenschaft, dass für alle  $p \in M$  der kovariante 2-Tensor  $g(p)$  positiv definit ist.

**Definition B.38** Eine **Riemannsche Mannigfaltigkeit**  $(M, g)$  ist eine glatte Mannigfaltigkeit  $M$ , zusammen mit einer Riemannschen Metrik  $g \in \mathcal{T}^2(M)$ .

Für ein  $p \in M$  wird die Norm:

$$\begin{aligned}|\cdot|_g : T_p M &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ X &\mapsto g(p)(X, X)\end{aligned}$$

als die von der **Riemannschen Metrik induzierte Norm auf  $T_p M$**  bezeichnet.

Ein wichtiges Beispiel einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist der  $\mathbb{R}^q$ , versehen mit der Standardtopologie, der Standardstruktur und der **Standard-Metrik auf  $\mathbb{R}^q$** :

$$g^{can} : M \longrightarrow T^2(M)$$



$$p \mapsto \sum_{i=1}^q \left| {}^{id}dx^i \right|_p^2$$

Hierbei ist  $\left| {}^{id}dx^i \right|_p^2 := \left| {}^{id}dx^i \right|_p \left| {}^{id}dx^i \right|_p$ .

**Definition B.39** *Gegeben seien glatte Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$  sowie eine Abbildung  $F \in C^\infty(M, N)$ , dann wird die Abbildung:*

$$\begin{aligned} F^* : T^2(T_{F(p)}N) &\longrightarrow T^2(T_pM) \\ (F^*S)(X_1, X_2) &:= S(F_*X_1, F_*X_2) \quad \text{für } S \in T^2(T_{F(p)}N) \text{ und } X_1, X_2 \in T_pM \end{aligned}$$

**Pullback** genannt.

Die wesentlichen Eigenschaften des Pullbacks sind in [Lee03, Proposition 11.8] zusammengefasst. Der Begriff des Pullbacks wird auch für glatte Tensorfelder verwendet. Ein Pullback eines  $\sigma \in \mathcal{T}^2(N)$  wird mit:

$$\begin{aligned} (F^*\sigma) : M &\longrightarrow T^2(M) \\ p &\mapsto (F^*\sigma_{F(p)}) \end{aligned}$$

definiert. Es gilt  $F^*\sigma \in \mathcal{T}^2(M)$ . Für weitere Informationen diesbezüglich sei auf [Lee03, Proposition 11.9] verwiesen.

## C Hilfsresultate

In diesem Kapitel werden einige Lemmata bewiesen, die in den Kapiteln 4 bis 7 verwendet werden. Zuerst wird die Existenz, der in Lemma 4.1 verwendeten Immersion  $F$ , induktiv bewiesen.

**Lemma C.1** *Für jedes  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  existiert eine Immersion  $F^{(n)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$ , die in jedem Argument  $2\pi$ -periodisch ist, und für die gilt:*

$$\partial_i F_l^{(n)} \equiv 0 \quad \text{für alle } l \in \{1, \dots, n-1\} \text{ und } i \in \{l+1, \dots, n\} \quad (\text{C.1})$$

*Beweis.* Für  $n = 1$  wird die Abbildung  $F^{(1)} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  mit:

$$F^{(1)}(x) := \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

definiert. Daraus wird die Abbildung  $F^{(2)} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$  wie folgt konstruiert:

$$F^{(2)}(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} 0 \\ F^{(1)}(x_2) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos(x_1) \\ \sin(x_1) \cdot F^{(1)}(x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos(x_1) \\ (1 + \frac{1}{2} \sin(x_1)) \cdot F^{(1)}(x_2) \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$DF^{(2)}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \sin(x_1) & 0 \\ \frac{1}{2} \cos(x_1) \cdot F^{(1)}(x_2) & (1 + \frac{1}{2} \sin(x_1)) \cdot \partial F^{(1)}(x_2) \end{pmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Da  $F^{(1)}(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^1$  gilt, erfüllt  $F^{(2)}$  alle geforderten Eigenschaften. Insbesondere ist, wegen der Form der Jacobimatrix in (C.3), die Bedingung (C.1) erfüllt. Nun sei  $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ , welches später spezifiziert werden wird. Um  $F^{(3)}$  aus  $F^{(2)}$  zu konstruieren, wird vorher die Abbildung  $\hat{F}^{(2)} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$  mit:

$$\hat{F}^{(2)}(x_1, x_2) := \frac{\partial_1 F^{(2)}(x_1, x_2) \times \partial_2 F^{(2)}(x_1, x_2)}{|\partial_1 F^{(2)}(x_1, x_2) \times \partial_2 F^{(2)}(x_1, x_2)|_{\mathbb{R}^3}} \in \mathbb{S}^2 \setminus \text{lin}(DF^{(2)}(x_1, x_2))$$

eingeführt. Aus (C.3) folgt, unter Beachtung der Orthogonalität der Spaltenvektoren:

$$\begin{aligned} |\partial_1 F^{(2)}(x_1, x_2) \times \partial_2 F^{(2)}(x_1, x_2)|_{\mathbb{R}^3} &= |\partial_1 F^{(2)}(x_1, x_2)|_{\mathbb{R}^3} \cdot |\partial_2 F^{(2)}(x_1, x_2)|_{\mathbb{R}^3} \\ &= \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin(x_1) \right) =: f(x_1) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Nun wird die Abbildung  $F^{(3)} \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$  wie folgt definiert:

$$F^{(3)}(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} \epsilon \cos(x_1) \\ F^{(2)}(x_2, x_3) + \epsilon \sin(x_1) \cdot \widehat{F}^{(2)}(x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

definiert. Es gilt:

$$DF^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -\epsilon \sin(x_1) & 0 \\ \epsilon \cos(x_1) \cdot \widehat{F}^{(2)}(x_2, x_3) & DF^{(2)}(x_2, x_3) + \epsilon \sin(x_1) \cdot D\widehat{F}^{(2)}(x_2, x_3)(x_2, x_3) \end{pmatrix} \quad (\text{C.5})$$

Ist  $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  klein genug, so ist  $F^{(3)}$  wegen (C.5), unter Verwendung der Periodizität von  $F^{(2)}$  und den Eigenschaften des Vektorproduktes, eine Immersion. Es wird noch gezeigt, dass die Bedingung  $\partial_2 \widehat{F}_1^{(2)} \equiv 0$  erfüllt ist, woraus dann mit (C.5) die Eigenschaft (C.1) für  $F^{(3)}$  folgt. Unter Anwendung der Produktregel gilt:

$$\begin{aligned} \partial_2 \widehat{F}^{(2)}(x_1, x_2) &\stackrel{(\text{C.4})}{=} f(x_1) \cdot \partial_2 [\partial_1 F^{(2)}(x_1, x_2) \times \partial_2 F^{(2)}(x_1, x_2)] \\ &= f(x_1) \cdot \partial_2 \partial_1 F^{(2)}(x_1, x_2) \times \partial_2 F^{(2)}(x_1, x_2) + f(x_1) \cdot \partial_1 F^{(2)}(x_1, x_2) \times \partial_2^2 F^{(2)}(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Mit (C.3) gilt:

$$\begin{aligned} \partial_2 \partial_1 F^{(2)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(x_1) \cdot \partial F^{(1)}(x_2) \end{pmatrix} \\ \partial_2^2 F^{(2)}(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} 0 \\ (1 + \frac{1}{2} \sin(x_1)) \cdot \partial^2 F^{(1)}(x_2) \end{pmatrix} \stackrel{(\text{C.2})}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ (1 + \frac{1}{2} \sin(x_1)) \cdot F^{(1)}(x_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dann ist mit (C.6):

$$\partial_2 \widehat{F}^{(2)} = \frac{f(x_1)}{2} \begin{pmatrix} \sin(x_1) \\ -\cos(x_1) \cdot F^{(1)}(x_2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ (1 + \frac{1}{2} \sin(x_1)) \cdot F^{(1)}(x_2) \end{pmatrix}$$


---

woraus  $\partial_2 \widehat{F}_1^{(2)} \equiv 0$  folgt. Definiere nun für den Induktionsschritt eine Abbildung  $\widehat{F}^{(3)} \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$  mit:

$$\widehat{F}^{(3)}(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} \cos(x_1) \\ \sin(x_1) \cdot \widehat{F}^{(2)}(x_2, x_3) \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^3$$

Falls  $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  klein genug ist, dann gilt mit (C.5), wegen  $|\widehat{F}^{(2)}|_{\mathbb{R}^3} \equiv 1$  und der Periodizität von  $F^{(2)}$  beziehungsweise  $\widehat{F}^{(2)}$ :

$$\widehat{F}^{(3)}(x_1, x_2, x_3) \notin \text{lin}(DF^{(3)}(x_1, x_2, x_3)) \quad (\text{C.7})$$

für alle  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ . Ferner sei erwähnt, dass  $\widehat{F}^{(3)}$  die Eigenschaft (C.1) erfüllt. Nun sei für  $n \geq 3$  eine Abbildung  $F^{(n)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$  gegeben, die alle geforderten Eigenschaften erfüllt. Wegen (C.7) kann zunächst angenommen werden, dass eine Abbildung  $\widehat{F}^{(n)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$  existiert, welche sowohl:

$$\widehat{F}^{(n)}(x) \in \mathbb{S}^n \setminus \text{lin}(DF^{(n)}(x)) \quad (\text{C.8})$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ , als auch (C.1) erfüllt. Dann wird für ein  $\epsilon_n \in \mathbb{R}_{>0}$ , welches wieder später konkretisiert wird, die Abbildung  $F^{(n+1)} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+2})$  folgendermaßen definiert:

$$F^{(n+1)}(x_1, \dots, x_{n+1}) := \begin{pmatrix} \epsilon_n \cos(x_1) \\ F^{(n)}(x_2, \dots, x_{n+1}) + \epsilon_n \sin(x_1) \cdot \widehat{F}^{(n)}(x_2, \dots, x_{n+1}) \end{pmatrix}$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} & DF^{(n+1)}(x_1, \dots, x_{n+1}) \\ &= \begin{pmatrix} -\epsilon_n \sin(x_1) & 0 \\ \epsilon_n \cos(x_1) \cdot \widehat{F}^{(n)}(x_2, \dots, x_{n+1}) & DF^{(n)}(x_2, \dots, x_{n+1}) + \epsilon_n \sin(x_1) \cdot D\widehat{F}^{(n)}(x_2, \dots, x_{n+1}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Durch eine hinreichend kleine Wahl von  $\epsilon_n \in \mathbb{R}_{>0}$  wird mit (C.8) gewährleistet, dass  $F^{(n+1)}$  eine Immersion ist. Für die Abbildung  $\widehat{F}^{(n+1)} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+2})$  mit:

$$\widehat{F}^{(n+1)}(x_1, \dots, x_{n+1}) := \begin{pmatrix} \cos(x_1) \\ \sin(x_1) \cdot \widehat{F}^{(n)}(x_2, \dots, x_{n+1}) \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^{n+1} \quad (\text{C.10})$$

kann dann angenommen werden, dass  $\epsilon_n \in \mathbb{R}_{>0}$  klein genug ist, so dass:

$$\widehat{F}^{(n+1)}(x) \notin \text{lin}(DF^{(n+1)}(x)) \quad (\text{C.11})$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$  gilt. Mit (C.9) ist die Bedingung (C.1) nach Induktionsvoraussetzung erfüllt. □

Die im folgenden Lemma notierten Abbildungen werden in Lemma 4.3, speziell (4.29), dafür verwendet, die Abbildung  $v_1 \in C^\infty(\mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$  zu konstruieren.

**Lemma C.2** *Die Abbildungen  $\alpha_1, \alpha_2 \in C^\infty(\mathbb{S})$  mit:*

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &:= \cos(t) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos(3t) \\ \alpha_2(t) &:= \sin(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(3t) \end{aligned}$$

*erfüllen die Eigenschaften:*

$$\alpha'_1(t) \alpha''_2(t) - \alpha'_2(t) \alpha''_1(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{S} \quad (\text{C.12})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \alpha'_i(t) \alpha_j(t) dt = 0 \quad \text{für } i, j \in \{1, 2\} \quad (\text{C.13})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \alpha_i(t) \sqrt{\alpha'_1(t)^2 + \alpha'_2(t)^2} dt = 0 \quad \text{für } i \in \{1, 2\} \quad (\text{C.14})$$

*Ferner ist die periodische Fortsetzung auf ganz  $\mathbb{R}$  glatt.*

*Beweis.* Es gilt für alle  $t \in \mathbb{S}$ :

$$\begin{aligned} \alpha'_1(t) &= -\sin(t) + \sqrt{3} \sin(3t) & \alpha'_2(t) &= \cos(t) + \sqrt{3} \cos(3t) \\ \alpha''_1(t) &= -\cos(t) + 3\sqrt{3} \cos(3t) & \alpha''_2(t) &= -\sin(t) - 3\sqrt{3} \sin(3t) \end{aligned}$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} & \alpha'_1(t) \alpha''_2(t) - \alpha'_2(t) \alpha''_1(t) \\ &= (-\sin(t) + \sqrt{3} \sin(3t))(-\sin(t) - 3\sqrt{3} \sin(3t)) \\ & \quad - (\cos(t) + \sqrt{3} \cos(3t))(-\cos(t) + 3\sqrt{3} \cos(3t)) \\ &= \sin^2(t) + 3\sqrt{3} \sin(t) \sin(3t) - \sqrt{3} \sin(3t) \sin(t) - 9 \sin^2(3t) \end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned}
& + \cos^2(t) - 3\sqrt{3} \cos(t) \cos(3t) + \sqrt{3} \cos(3t) \cos(t) - 9 \cos^2(3t) \\
& = 2\sqrt{3} \sin(t) \sin(3t) - 2\sqrt{3} \cos(t) \cos(3t) - 8 \\
& = 2\sqrt{3} (\sin(t) \sin(3t) - \cos(t) \cos(3t)) - 8 \\
& = 2\sqrt{3} [3 \sin^2(t) - 4 \sin^4(t) - 4 \cos^4(t) + 3 \cos^2(t)] - 8 \\
& = 2\sqrt{3} [-4(\sin^4(t) + \cos^4(t)) + 3] - 8 \\
& = -8\sqrt{3}(\sin^4(t) + \cos^4(t)) + 6\sqrt{3} - 8
\end{aligned} \tag{C.15}$$

Die Funktion  $t \mapsto \sin^4(t) + \cos^4(t)$  wird genauer untersucht. Es gilt:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}(\sin^4(t) + \cos^4(t)) = 4(\sin^3(t) \cos(t) - \cos^3(t) \sin(t)) \\
& = 4 \sin(t) \cos(t) \cdot (\sin^2(t) - \cos^2(t)) = 4 \sin(t) \cos(t) \cdot (2 \sin^2(t) - 1) \\
& = 2 \sin(2t) \cdot (2 \sin^2(t) - 1) = -2 \sin(2t) \cos(2t) = -\sin(4t)
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$\min_{t \in \mathbb{S}} (\sin^4(t) + \cos^4(t)) = \frac{1}{2}$$

Mit (C.15) folgt dann:

$$\alpha'_1(t) \alpha''_2(t) - \alpha'_2(t) \alpha''_1(t) \leq 2\sqrt{3} - 8 < 0$$

womit (C.12) gezeigt ist. Nun sei  $i \in \{1, 2\}$  dann ist:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \alpha'_i(t) \alpha_i(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{dt}(\alpha_i^2(t)) dt = \frac{\alpha_i^2(\pi) - \alpha_i^2(-\pi)}{2} = 0$$

Weiterhin ist:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi}^{\pi} \alpha'_1(t) \alpha_2(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} (-\sin(t) + \sqrt{3} \sin(3t)) \cdot \left(\sin(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(3t)\right) dt \\
& = - \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(t) dt + \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t) \cdot \sin(3t) dt + \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(3t) dt \\
& = -\pi + 0 + \pi = 0
\end{aligned}$$

Daraus folgt mittels partieller Integration:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \alpha'_2(t) \alpha_1(t) dt = \alpha_2(\pi) \alpha_1(\pi) - \alpha_2(-\pi) \alpha_1(-\pi) - \int_{-\pi}^{\pi} \alpha_2(t) \alpha'_1(t) dt = 0$$


---

womit (C.13) gezeigt ist. Es bleibt noch (C.14) zu zeigen. Zunächst gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha'_1(t)^2 + \alpha'_2(t)^2 &= (-\sin(t) + \sqrt{3}\sin(3t))^2 + (\cos(t) + \sqrt{3}\cos(3t))^2 \\
&= \sin^2(t) - 2\sqrt{3}\sin(t)\sin(3t) + 3\sin^2(3t) + \cos^2(t) + 2\sqrt{3}\cos(t)\cos(3t) + 3\cos^2(3t) \\
&= -2\sqrt{3}(\sin(t)\sin(3t) - \cos(t)\cos(3t)) + 4 \\
&= -2\sqrt{3}(3\sin^2(t) - 4\sin^4(t) - 4\cos^4(t) + 3\cos^2(t)) + 4 \\
&= -2\sqrt{3}(-4(\sin^4(t) + \cos^4(t)) + 3) + 4 \\
&= 8\sqrt{3}(\sin^4(t) + \cos^4(t)) - 6\sqrt{3} + 4
\end{aligned}$$

Somit ist die Funktion  $t \mapsto \sqrt{\alpha'_1(t)^2 + \alpha'_2(t)^2}$  symmetrisch und es folgt, aus der Antisymmetrie der Abbildung  $\alpha_2$ , die Bedingung (C.14) für den Fall  $i = 2$ . Da  $\alpha_1$  um  $t = \frac{3}{2}\pi$  antisymmetrisch ist, folgt (C.14) auch für den Fall  $i = 1$ . □

Das folgende Lemma spielt bei der Betrachtung der Abbildung  $F_{\epsilon,k}$  am Anfang von Abschnitt 4.2 eine wichtige Rolle. Dort wird  $\beta \in C^\infty(\mathbb{R})$  konkret definiert.

**Lemma C.3** *Für jedes  $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  gilt:*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\partial^s \beta(t)| < \infty$$

*Beweis.* Mit (4.36) gilt:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\beta'(t)| = \frac{1}{\min_{t \in \mathbb{S}} |\varrho(t)|} \stackrel{(4.30)}{<} \infty$$

womit die Aussage für  $s = 1$  gezeigt ist. Nun sei die Aussage für  $\{1, \dots, s\} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$  richtig. Mit der Formel von Faà di Bruno [Tor55] gilt:

$$\partial^{s+1}(P \circ \beta) = \sum_{(k_1, \dots, k_{s+1}) \in T_{s+1}} \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_{s+1}!} (\partial^{k_1 + \dots + k_{s+1}} P \circ \beta) \prod_{\substack{m=1 \\ k_m \geq 1}}^{s+1} \left( \frac{\partial^m \beta}{m!} \right)^{k_m} \quad (\text{C.16})$$

mit  $T_{s+1} := \left\{ (k_1, \dots, k_{s+1}) \in \mathbb{N}^{s+1} : \sum_{j=1}^{s+1} j k_j = s+1 \right\}$ . Wegen  $P \circ \beta = id_{\mathbb{R}}$  ist mit (C.16):

$$0 \equiv \partial^{s+1}(P \circ \beta)$$


---

$$= \sum_{(k_1, \dots, k_{s+1}) \in \widehat{T}_{s+1}} \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_{s+1}!} (\partial^{k_1 + \dots + k_{s+1}} P \circ \beta) \prod_{\substack{m=1 \\ k_m \geq 1}}^{s+1} \left( \frac{\partial^m \beta}{m!} \right)^{k_m} + n! \cdot P' \circ \beta \cdot \frac{\partial^{s+1} \beta}{(s+1)!}$$

mit  $\widehat{T}_{s+1} = T_{s+1} \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$ . Es folgt, wegen  $P'(t) = \varrho(t) \neq 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\partial^{s+1} \beta = \frac{(s+1)!}{n!} \cdot \frac{-1}{P' \circ \beta} \sum_{(k_1, \dots, k_{s+1}) \in \widehat{T}_{s+1}} \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_{s+1}!} (\partial^{k_1 + \dots + k_{s+1}} P \circ \beta) \prod_{\substack{m=1 \\ k_m \geq 1}}^{s+1} \left( \frac{\partial^m \beta}{m!} \right)^{k_m}$$

Da die letzte Komponente eines Multiindex in  $\widehat{T}_{s+1}$  stets 0 ist, folgt die Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung, unter Beachtung der Periodizität von  $\varrho$ . □

Das folgende Lemma wird in Kapitel 5 und Kapitel 7 dafür verwendet, um die Ableitungen der Approximationsfolgeglieder gleichmäßig abzuschätzen.

**Lemma C.4** *Es sei  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$  so dass für alle  $k \in \mathbb{N}$  die Abschätzung:*

$$a_{k+1} \leq \frac{a_k + C}{2}$$

*für eine feste, nicht von  $k$  abhängige Konstante  $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  gilt, dann gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$  die Abschätzung:*

$$a_k \leq a_0 + C$$

*Beweis.* Für  $k = 0$  ist die Aussage richtig. Unter der Annahme, dass die Aussage für ein  $k \in \mathbb{N}$  gilt, ist:

$$a_{k+1} \leq \frac{a_0 + 2C}{2} \leq a_0 + C$$

womit die Aussage bewiesen ist. □



# Notation

$\overline{S}$	Abschluss von $S$ . 116
$\mathcal{A}$	Atlas auf $M$ . 121
$T^2(M)$	Bündel von kovarianten 2-Tensoren. 127
$\partial_{t,h}u$	Differenzenquotient. 100
$\dim(M)$	Dimension einer topologischen Mannigfaltigkeit $M$ . 120
$\coprod_{\alpha \in A} X_\alpha$	disjunkte Vereinigung. 127
$T_p^*M$	Dualraum zu $T_pM$ . 124
$\text{diam}(S)$	Durchmesser von $S$ . 58
$\mathbb{B}$	Einheitsball in $\mathbb{R}^n$ . 6
$\mathbb{S}^{q-1}$	Einheitssphäre in $\mathbb{R}^q$ . 14
$UM$	Einheitstangentialbündel von $M$ . 19
$ x _{\mathbb{R}^n}$	euklidische Norm. 118
$M$	glatte Mannigfaltigkeit. 121
$[u]_{\alpha,S}$	Hölderkonstante. 111
$I$	$[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ . 42
${}^\varphi dx^i _p$	i-ter dualer Basisvektor. 124
${}^\varphi \frac{\partial}{\partial x^i} _p$	i-ter Koordinatenvektor. 123
$\text{id}_S$	Identität auf $S$ . 122
$\text{int}(S)$	Inneres von $S$ . 116

$\prod_{i=1}^k M_i$	kartesisches Produkt der Mengen $M_1, \dots, M_k$ . 121
$ccone(X)$	konvex-konische Hülle von $X$ . 24
$conv(X)$	konvexe Hülle von $X$ . 24
${}^\varphi F$	Koordinatendarstellung von $F$ . 122
${}^\varphi_\psi F$	Koordinatendarstellung von $F$ . 122
$\Lambda(\epsilon^k)$	$\epsilon^k h$ mit $h \in C^\infty(I \times \mathbb{S} \times \overline{\mathbb{B}})$ und $supp(h) \subseteq I \times \mathbb{S} \times \mathbb{B}$ . 45
$L^p$	Lebesgue-Raum. 115
${}^\varphi T_{ij}$	lokale Darstellung eines kovarianten 2-Tensors $T$ . 128
$\ \cdot\ _{\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q}$	Matrixnorm, die von $ \cdot _{\mathbb{R}^q}$ induziert wird. 27
$C^\infty(M, N)$	Menge aller glatten Abbildungen zwischen $M$ und $N$ . 122
$C^\infty(M)$	Raum aller glatten reellen Abbildungen auf $M$ . 122
$d$	Metrik. 117
$(M, d)$	metrischer Raum. 117
$ \cdot _g$	Norm auf $T_p M$ . 128
$\ \cdot\ _{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})}$	Norm auf $C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$ . 111
$ u _{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})}$	Norm auf $C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$ . 112
$\ u\ _{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})}$	Norm auf $C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$ . 112
$\ \cdot\ _{C^m(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^q)}$	Norm auf $C^m(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^q)$ . 110
$ u _{C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)}$	Norm auf $C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$ . 114
$\ \cdot\ _{W^{m,p}(\Omega)}$	Norm auf $W^{m,p}(\Omega)$ . 115
$B_R(x)$	offener Ball um $x$ mit dem Radius $R$ . 117
$F^*$	Pullback. 129
$\partial S$	Rand von $S$ . 116
$C^m(\Omega, \mathbb{R}^q)$	Raum aller $m$ -fach stetig differenzierbaren vektorwertigen Funktionen auf einer offenen Menge $\Omega$ . 110

$D_p^2(F)$	Raum aller Ableitungen bis zur zweiten Ordnung. 9
${}^\varphi D_p^2(F)$	Raum aller Ableitungen bis zur zweiten Ordnung bzgl. Karte. 8
$C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$	Raum aller $\alpha$ -hölderstetigen reellen Funktionen auf $\mathbb{B}$ . 111
$C^m(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^q)$	Raum aller Funktionen aus $m$ -fach stetig differenzierbaren Funktionen auf einer offenen, beschränkten Menge $\Omega$ , deren Ableitungen sich stetig bis zum Rand fortsetzen lassen. 110
$C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^q)$	Raum aller glatten Abbildungen auf einer offenen Menge $\Omega$ . 110
$C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^q)$	Raum aller glatten Abbildungen auf einer offenen Menge $\Omega$ , deren Ableitungen stetig bis zum Rand fortsetzbar sind. 110
$C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}}, \mathbb{R}^q)$	Raum aller $m$ -fach stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{B}$ deren Ableitungen $\alpha$ -hölderstetig sind. 114
$C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})$	Raum aller $m$ -fach stetig differenzierbaren reellen Funktionen auf $\mathbb{B}$ deren Ableitungen $\alpha$ -hölderstetig sind. 111
$(M, g)$	Riemannsche Mannigfaltigkeit. 128
$g$	Riemannsche Metrik. 128
$\mathbb{S}$	$[-\pi, \pi] \subseteq \mathbb{R}$ . 37
$W^{m,p}(\Omega)$	Sobolev-Raum. 115
$W_0^{m,p}(\Omega)$	Sobolev-Raum mit Nullrandbedingung. 115
$g^{can}$	Standard-Metrik auf $\mathbb{R}^n$ . 128
$\omega\eta$	symmetrisiertes Tensorprodukt. 127
$TM$	Tangentialbündel von $M$ . 19
$T_pM$	Tangentialraum von $M$ im am Punkt $p$ . 123
$\omega \otimes \eta$	Tensorprodukt. 126
$(X, \mathcal{T})$	topologischer Raum. 116
$supp(f)$	Träger von $f$ . 117
$(E, M, \pi)$	Vektorbündel. 125
$\mathcal{T}^2(M)$	Vektorraum aller glatten kovarianten 2-Tensorfelder in $T^2(M)$ . 128
$T^2(T_pM)$	Vektorraum aller kovarianten 2- Tensoren auf $T_pM$ . 126
$\Sigma^2(T_pM)$	Vektorraum aller symmetrischen kovarianten 2-Tensoren auf $T_pM$ . 126



# Literaturverzeichnis

- [Alt12] ALT, Hans W.: *Lineare Funktionalanalysis*. 6. Springer DE, 2012
- [And02] ANDREWS, Ben: Notes on the isometric embedding problem and the Nash-Moser implicit function theorem. In: *Proc. CMA* 40 (2002), S. 157–208
- [Car27] CARTAN, Élie: Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien. In: *Annales Societatis Mathematicae Polonae* 6 (1927), S. 1–7
- [È70] ÈLIAŠBERG, Ja M.: On singularities of folding type. In: *Mathematics of the USSR-Izvestiya* 4 (1970), Nr. 5, S. 1119
- [Eva98] EVANS, LC: *Partial Differential Equations* (Graduate Studies in Mathematics vol 19)(Providence, RI: American Mathematical Society). (1998)
- [Fis08] FISCHER, Gerd: *Lineare Algebra: Eine Einführung für Studienanfänger*. Springer DE, 2008
- [GR70] GROMOV, Mikhail L. ; ROKHLIN, Vladimir A.: Embeddings and immersions in Riemannian geometry. In: *Russian Mathematical Surveys* 25 (1970), Nr. 5, S. 1–57
- [GT01] GILBARG, David ; TRUDINGER, Neil S.: *Elliptic partial differential equations of second order*. Bd. 224. Springer, 2001
- [Gün89a] GÜNTHER, Matthias: On the perturbation problem associated to isometric embeddings of Riemannian manifolds. In: *Annals of Global Analysis and Geometry* 7 (1989), Nr. 1, S. 69–77
- [Gün89b] GÜNTHER, Matthias: Zum Einbettungssatz von J. Nash. In: *Mathematische Nachrichten* 144 (1989), Nr. 1, S. 165–187

- [Gün91] GÜNTHER, Matthias: Isometric embeddings of Riemannian manifolds. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* Bd. 2, 1991, S. 1137–1143
- [Ham82] HAMILTON, Richard S.: Three-manifolds with positive Ricci curvature. In: *Journal of Differential Geometry* 17 (1982), Nr. 2, S. 255–306
- [HH06] HAN, Qing ; HONG, Jia-Xing: *Isometric embedding of Riemannian manifolds in Euclidean spaces*. Bd. 130. AMS Bookstore, 2006
- [Hir94] HIRSCH, Morris W.: *Differential topology*. 1994
- [Jan26] JANET, M.: Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien. In: *Annales Societatis Mathematicae Polonae* 5 (1926), S. 422–430
- [Lee03] LEE, John M.: *Introduction to Smooth Manifolds*. Bd. 218. Springer, 2003
- [Mun00] MUNKRES, James R.: *Topology*. Bd. 2. Prentice Hall Upper Saddle River, 2000
- [Nas56] NASH, John: The imbedding problem for Riemannian manifolds. In: *The annals of Mathematics* 63 (1956), Nr. 1, S. 20–63
- [Sch71] SCHLAEFLI, L: Nota alla Memoria del sig. Beltrami, «Sugli spazii di curvatura costante». In: *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1867-1897)* 5 (1871), Nr. 1, S. 178–193
- [Sch97] SCHWARZ, Hans R.: *Numerische Mathematik*. B.G. Teubner Stuttgart, 1997
- [See64] SEELEY, Robert T.: Extension of  $C^\infty$ -functions defined in a half space. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 15 (1964), Nr. 4, S. 625–626
- [Tor55] TORTOLINI, B.: *Annali di scienze matematiche e fisiche*. Tip. delle bella arti, 1855 (Bd. 6). – 479–480 S.
- [Wer92] WERNER, Jochen: *Numerische Mathematik 2*. Vieweg, 1992
- [Whi44a] WHITNEY, Hassler: The self-intersections of a smooth  $n$ -manifold in  $2n$ -space. In: *The Annals of Mathematics* 45 (1944), Nr. 2, S. 220–246
- [Whi44b] WHITNEY, Hassler: The singularities of a smooth  $n$ -manifold in  $(2n-1)$ -space. In: *The Annals of Mathematics* 45 (1944), Nr. 2, S. 247–293

# Index

$C^\infty$ -Diffeomorphismus, 120

$C^\infty$ -verträglich, 120

Überdeckung, 117

offene  $\sim$ , 117

Abbildung

freie  $\sim$ , 10

glatte  $\sim$ , 122

Ableitung, 123

Atlas, 120

$C^\infty$ - $\sim$ , 120

Basis

$\sim$  eines Vektorbündels, 125

$\sim$  für eine Topologie, 118

duale  $\sim$ , 124

Derivation, 122

dichte Teilmenge, 117

Differenzenquotient, 100

disjunkte Vereinigung, 127

Durchmesser, 58

Einbettung

$C^\infty$ - $\sim$ , 124

freie  $\sim$ , 10

glatte  $\sim$ , 124

Faser, 124

Gramsche

$\sim$  Determinante, 41

$\sim$  Matrix, 41

Hölderkonstante, 111

Hülle

konvex-konische  $\sim$ , 24

konvexe  $\sim$ , 24

Hausdorff-Raum, 119

Homöomorphismus, 119

homöomorph, *siehe* Homöomorphismus

Identität auf S, 122

Immersion, 124

Inklusion, 123

Karte, 120

Koordinaten

$\sim$ -Transformation, 120

$\sim$ -Umgebung, 120

$\sim$ -darstellung, 122

$\sim$ -ball, 120

Koordinaten. $\sim$ , 123

zentrierte  $\sim$ -Umgebung, 120

Kovektor, 124

Lebesgue-Raum, 115

Lebesgue-Zahl, 58

lokal euklidisch, 120

lokale Trivialisierung, 125

Mannigfaltigkeit

$C^\infty$ -~, *siehe* glatte-~

glatte ~, 121

glatte Produkt-~, 121

Riemannsche ~, 128

geschlossene ~, 5

topologische ~, 119

Unter-~

eingebettete ~, 126

offene ~, 123

maximaler  $C^\infty$ -Atlas, 120

Menge

abgeschlossene ~, 116

Abschluss einer ~, 116

Inneres einer ~, 116

Null-~ in  $M$ , 13

offene ~, 116

Rand einer ~, 117

relativ kompakte ~, 119

relativ offene ~, 119

Metrik, *siehe* metrischer Raum

Riemannsche ~, 128

von ~ induzierte Norm auf  $T_p M$ ,  
128

Standard-~ auf  $\mathbb{R}^q$ , 128

metrischer Raum, 117

Norm

Matrix-~, 27

offener Ball, 118

Pullback, 129

~ eines glatten kovarianten 2-Tensorfeldes, topologischer Raum, 116  
129

Rang einer Abbildung, 124

Raum aller Ableitungen bis zur zweiten  
Ordnung, 9

~ bzgl. Karte, 8

Schnitt, 125

glatter ~, 125

Sobolev-Raum, 115

Spuroperator, 69

Stetigkeit, 119

Hölder-~, 111

Struktur

$C^\infty$ -~, *siehe* glatte ~

glatte ~, 120

Standard-~, 122

Tangentialbündel, 19

Einheits-~, 19

Tangentialraum, 123

Tensor

~-Produkt, 126

symmetrisiertes ~, 127

Bündel von kovarianten 2-~en, 127

glattes kovariantes 2-~feld, 128

glattes symmetrisches kovariantes 2-  
~-feld, 128

kovarianter 2-~, 126

positiv definiten ~, 126

symmetrischer ~, 126

Topologie, *siehe* topologischer Raum

Standard-~, 118

Unterraum-~, 119

von Basis erzeugte ~, 118

von Metrik erzeugte ~, 118

topologischer Raum, 116

kompakter ~, 117



metrisierbarer  $\sim$ , 118

separabler  $\sim$ , 119

Totalraum, 125

Vektorbündel, 124

glatt trivialisierbares  $\sim$ , 125

glattes  $\sim$ , 125

zweites Abzählbarkeitsaxiom, 119

## **Erklärung**

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Magdeburg, den 19. November 2013

Norman Zergänge